



Teória komplexnej premennej

Pavol ORŠANSKÝ



Publikácia vznikla vďaka grantu KEGA - č.: 040ŽU-4/2018 - Implementácia progresívnych metód výučby vysokoškolskej matematiky pre študentov technických odborov.

Vedecký redaktor prof. Ing. Peter Palček, PhD.

Recenzenti doc. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.

doc. Ing. Mária Kúdelčíková, PhD.

Za odbornú, jazykovú a technickú úroveň publikácie zodpovedá autor.

Vydala Žilinská univerzita v Žiline/EDIS-vydavateľské centrum ŽU

© P. Oršanský, 2020

ISBN 978-80-554-1764-6



Obsah

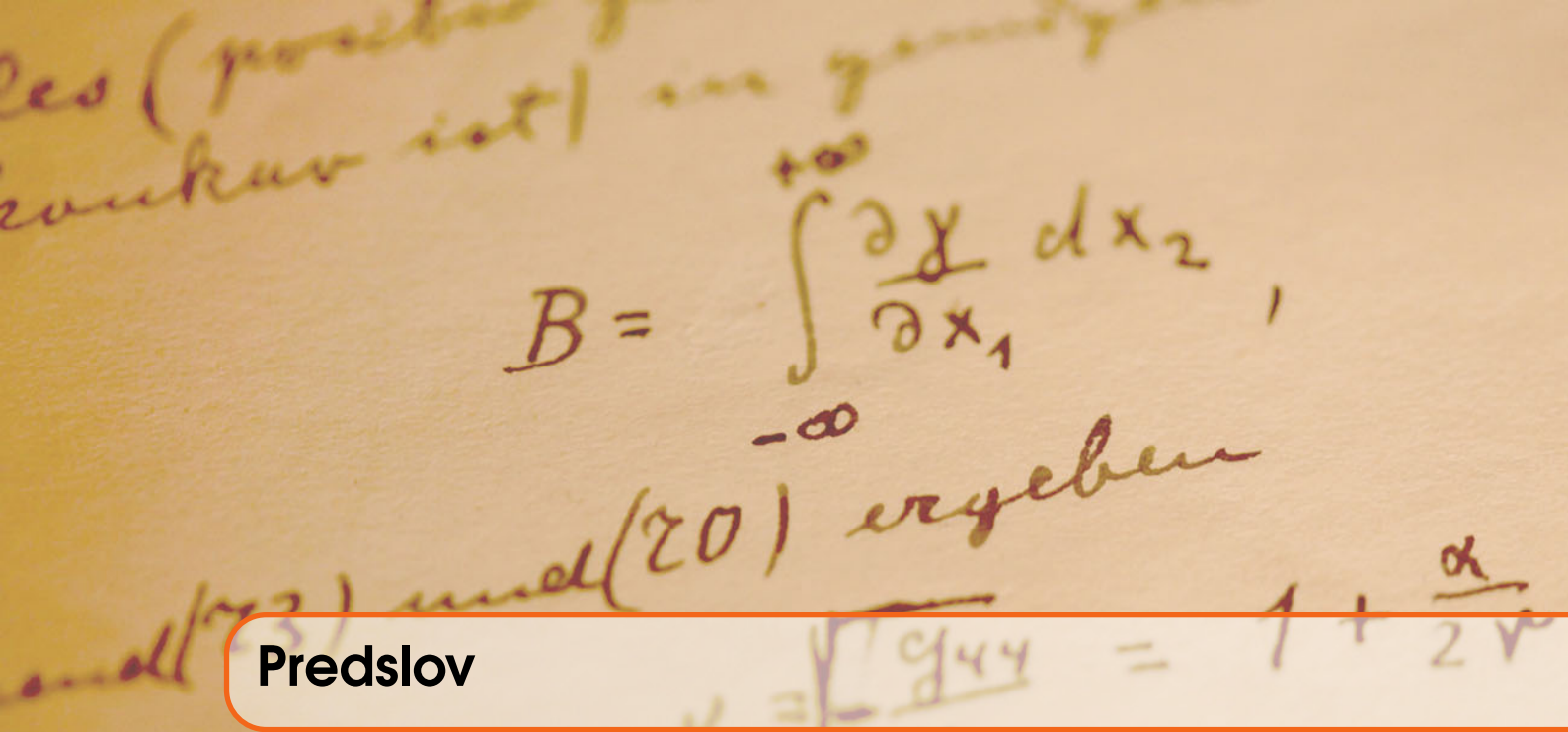
Teória komplexnej premennej

1	Komplexné čísla	11
1.1	Definícia a základné vlastnosti	11
1.2	Trojaký tvar komplexného čísla	16
1.3	Binomická rovnica	17
1.4	Nekonečno	21
1.5	Cvičenia	22
2	Komplexná funkcia komplexnej premennej	23
2.1	Postupnosti a nekonečné číselné rady komplexných čísel	23
2.2	Komplexná funkcia komplexnej premennej	29
2.3	Limita a spojitost' funkcie komplexnej premennej	30
2.4	Komplexná funkcia reálnej premennej	33
2.5	Cvičenia	39
3	Derivácia funkcie a holomorfná funkcia	41
3.1	Derivácia funkcie komplexnej premennej	41
3.2	Cauchyho-Riemannove rovnice	45
3.2.1	Cauchyho-Riemannove rovnice v polárnych súradniciach	52
3.3	Harmonické funkcie a komplexný potenciál	54
3.4	Cvičenia	60

4	Mocninový rad holomorfnej funkcie	61
4.1	Komplexný mocninový rad	61
4.2	Funkcionálny rad komplexnej premennej	71
4.3	Derivácia a jednoznačnosť mocninového radu	72
4.4	Cvičenia	77
5	Elementárne funkcie komplexnej premennej	79
5.1	Lineárna funkcia	79
5.2	Lineárna lomená funkcia	79
5.3	Mnohočlen (polynóm)	81
5.4	n -tá odmocnina komplexného čísla	81
5.5	Exponenciálna a goniometrické funkcie, Eulerove vzorce	82
5.6	Hyperbolické funkcie	83
5.7	Logaritmická funkcia	88
5.8	Mocninová funkcia	89
5.9	Cyklometrické funkcie	89
5.10	Hyperbolometrické funkcie	91
5.11	Cvičenia	91
6	Integrál komplexnej premennej	93
6.1	Krivka v Gaussovej rovine komplexných čísel	93
6.2	Integrál funkcie komplexnej premennej	94
6.3	Cauchyho fundamentálna veta	104
6.4	Dôsledky Cauchyho fundamentálnej vety	106
6.5	Cauchyho integrálny vzorec (formula)	110
6.6	Cvičenia	120
7	Holomorfná funkcia ako mocninový rad	121
7.1	Taylorov rad	121
7.2	Laurentov rad holomorfnej funkcie	129
7.2.1	Vzťah medzi Laurentovým radom a Fourierovým radom	134
7.2.2	Laurentov rad v nevlastnom bode	136
7.3	Cvičenia	137
8	Klasifikácia singulárnych bodov, rezíduum	139
8.1	Klasifikácia singulárnych bodov	139
8.2	Rezíduum funkcie	141
8.2.1	Rezíduum v nekonečne	144
8.3	Cauchyho veta o rezíduách a jej využitie	148
8.4	Určitý integrál riešený pomocou rezíduí	152
8.5	Cvičenia	163

Integrálne transformácie

9	Fourierova transformácia	167
9.1	Definícia Fourierovej transformácie	167
9.2	Vlastnosti Fourierovho zobrazenia	173
9.3	Aplikácie Fourierovej transformácie	179
9.4	Cvičenia	182
10	Laplaceova transformácia	185
10.1	Definícia Laplaceovej transformácie	185
10.2	Vlastnosti Laplaceovej transformácie	189
10.3	Spätná Laplaceova transformácia	209
10.4	Aplikácie Laplaceovej transformácie	224
10.4.1	Lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientmi	224
10.4.2	Výpočet nevlastných integrálov	233
10.5	Cvičenia	236



Predslov

Táto publikácia sa zaoberá analýzou v komplexnom obore, čo je časť radiaca sa ku klasickej matematickej analýze. Je určená pre poslucháčov tretieho semestra elektrotechnických fakúlt technických vysokých škôl, ktorých osnovám zodpovedá. Vyžadujú sa základné poznatky z matematickej analýzy reálnej premennej, ktoré študenti nadobudli v predchádzajúcich semestroch štúdia.

Našou snahou nebolo nahradiť niektoré, podľa nášho názoru, výborné publikácie iných autorov [8], [1] (najmä prof. Moravčíka [3], ktorá je nám i historicky najbližšia), ale určitým spôsobom sa snažíme priblížiť sa súčasnému študentovi a zároveň neznižovať úroveň pod únosnú mieru. I dnes sa nájdu učebnice, ktoré sú určite vynikajúcimi pomôckami, i keď asi nie pre študenta technického odboru [4], [2]. Preto sme sa prehľadnosťou a použitím aktuálne platného označenia snažili zjednodušiť čitateľovi zrozumiteľnosť textu pri zachovaní istej miery matematickej kultúry. Dôkazy tvrdení sú často len načrtnuté, aby svojou zdĺhavosťou a drobnokresbou neodradzovali študenta od ich preštudovania. Niektoré dôkazy obdobných tvrdení matematickej analýzy v reálnom obore sú vynechané, ako aj zanedbateľný počet dôkazov, ktoré svojou náročnosťou presahujú matematické zručnosti a požadované vedomosti študenta tretieho semestra, ak to zrozumiteľnosť textu dovoľuje. Okrem toho sme sa snažili ponúknuť dostatočné množstvo riešených príkladov na získanie potrebnej rutiny študenta pri následnom samostatnom riešení. Na konci každej kapitoly sme zaradili cvičenia s neriešenými príkladmi s výsledkami, aby si študent mohol nadobudnuté učivo lepšie osvojiť [3], [5], [7].

Publikáciu tvoria dve časti: *Teória komplexnej premennej* a *Integrálne transformácie*. Prvá je akýmsi vstupom do teórie holomorfných funkcií, kde sme do istej miery okresali oblasti, ktoré s danou problematikou priamo nesúvisia. Druhá časť sa venuje dvom základným typom integrálnych transformácií, a to Fourierovej a Laplaceovej transformácii.

V prvej kapitole definujeme komplexné číslo, jeho reprezentáciu, ako aj jeho základné vlastnosti. Tieto poznatky už samozrejme študenti nadobudli, ale pre ozrejmenie odporúčame čitateľovi nevynechať ich štúdium.

Druhá kapitola je venovaná komplexnej funkcii komplexnej premennej. Využívajúc analógie analýzy reálnej premennej sa tu zaoberáme postupnosťami komplexných čísel, nekonečnými radmi komplexných čísel, definujeme si komplexnú funkciu komplexnej premennej a jej vlastnosti a nakoniec sa venujeme významnej triede komplexných funkcií reálnej premennej a ich reprezentácii v Gaussovej rovine.

Tretia kapitola rieši jeden z najzásadnejších rozdielov oproti analýze v reálnom obore, a to deriváciu komplexnej funkcie komplexnej premennej. Definujeme Cauchyho-Riemannove rovnice a následne zavádzame pojem holomorfnej funkcie, od ktorého sa budú odvíjať takmer všetky nasledujúce úvahy. Takisto uvedieme základné vlastnosti harmonických funkcií komplexnej premennej.

Štvrtá kapitola sa venuje radom komplexných funkcií komplexnej premennej a to najmä s dôrazom na ich reprezentáciu mocninovými radmi.

V piatej kapitole sú definované niektoré základné typy elementárnych funkcií komplexnej premennej, pričom sa podrobnejšie venujeme vzťahom medzi exponenciálnou, goniometrickými a hyperbolickými funkciami, ktorých vlastnosti budeme hojne v nasledujúcich častiach využívať.

Šiesta kapitola sa celá venuje integrálnemu počtu v komplexnom obore. Cez krivkový integrál prejdeme ku Cauchyho fundamentálnej vete integrálneho počtu a jej dôsledkom, ktoré nám poskytnú aparát na odvodenie Cauchyho integrálneho vzorca.

V siedmej kapitole rozvíjame možnosti reprezentácie holomorfných funkcií Taylorovým a následne aj Laurentovým radom v istých oblastiach Gaussovej roviny.

V ôsmej kapitole klasifikujeme izolované singulárne body, následne definujeme pojem rezídua funkcie v bode, aby sme pomocou neho zaviedli Cauchyho vetu o rezíduách, ktorej využitie sa neobmedzuje len na výpočet krivkových integrálov v reálnom a komplexnom obore, ale takisto nájde uplatnenie pri riešení nevlastných integrálov.

V deviatej kapitole uvedieme základné vlastnosti Fourierovej transformácie a ukážeme možnosti jej využitia na riešenie diferenciálnych rovníc.

Posledná desiatka kapitola je venovaná Laplaceovej transformácii. Dá sa povedať, že je to nosná kapitola druhej časti, okrem základných vlastností sa takisto podrobne zaoberáme spätnou Laplaceovou transformáciou. V závere si ukážeme aplikačné možnosti na iné matematické disciplíny.

V neposlednom rade by sme radi poďakovali recenzentom doc. Ing. Márii KÚDELČÍKOVEJ, PhD. a doc. RNDr. Ondrejovi HUTNÍKOVÍ, PhD. za pozorné preštudovanie pôvodného rukopisu, jeho opravu, množstvo cenných rád a fundovaných pripomienok. Ďalej ďakujeme Ing. Petrovi TOMAŠOVIČOVI a Mgr. Dušanovi PAULOVI za grafickú a editorskú podporu. A takisto patrí vďaka RNDr. Márii MICHALKOVEJ, PhD. a RNDr. Ondrejovi VEREŠOVI za kontrolu správnosti výsledkov riešených i neriešených príkladov.

1. Komplexné čísla

1.1 Definícia a základné vlastnosti

Komplexné čísla zavádzame rozšírením oboru reálnych čísel takým spôsobom, aby v ňom mali príslušný počet riešení všetky algebrické rovnice podľa základnej vety algebryⁱ.

Definícia 1.1.1 — Komplexné čísla. Množinu všetkých usporiadaných dvojíc $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, pre ktoré zavedieme operáciu *sčítania*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

a operáciu *násobenia*

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

označíme symbolom $\mathbb{C}$ a spolu s uvedenými operáciami ju nazývame *oborom komplexných čísel* alebo *komplexné čísla*. Prvok $z \in \mathbb{C}$ sa nazýva komplexné číslo.

Množinu usporiadaných dvojíc alebo množinu dvojrozmerných vektorov (x, y) poznáme ako rovinu $\mathbb{R}^2$. Rozdiel oproti množine komplexných čísel $\mathbb{C}$ je v operáciách, ktoré môžeme na prvkoch vykonať. Hoci sčítanie vektorov a komplexných čísel sa zhoduje, v množine $\mathbb{C}$ je navyše operácia násobenia. Výsledkom násobenia komplexných čísel je (na rozdiel od skalárneho súčinu vektorov v $\mathbb{R}^2$) usporiadaná dvojica (nie skalár). Číže súčin dvoch komplexných čísel je opäť komplexné číslo.

Napriek tomu môžeme využiť niečo, čo majú spoločné množiny $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$, a to reprezentáciu ich prvkov pomocou bázy v $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Všimnime si, že prvky typu $(x, 0)$ sa vzhľadom na sčítanie a násobenie definované v Definícii 1.1.1 správajú

ⁱZákladná veta algebry je dôležité matematické tvrdenie, ktoré má fundamentálny význam v algebre, ale podstatnú úlohu hrá aj v ďalších odvetviach matematiky. Hovorí, že každý polynóm s komplexnými koeficientmi stupňa $n \geq 1$ má aspoň jeden komplexný koreň. Najstarší publikovaný dôkaz pochádza od Jeana-Roberta Arganda z roku 1806.

ako reálne čísla pri aritmetických operáciách

$$\begin{aligned}(x_1, 0) + (x_2, 0) &= (x_1 + x_2, 0), \\ (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) &= (x_1 x_2, 0).\end{aligned}$$

Pri označení $(x_1, 0) \sim x_1$, $(x_2, 0) \sim x_2$ súčtu zodpovedá prvok $x_1 + x_2 \sim (x_1 + x_2, 0)$ pre súčin podobne $x_1 \cdot x_2 \sim (x_1 x_2, 0)$. Bázový prvok $(1, 0)$ zachováva aritmetické operácie obvyklého sčítania a násobenia reálnym číslom, t. j.

$$\begin{aligned}(x, y) + (1, 0) &= (x, y), \\ (x, y) \cdot (1, 0) &= (x, y).\end{aligned}$$

Venujme sa teraz druhému bázovému prvku $(0, 1)$. Vynásobíme ho sebou samým podľa Definície 1.1.1

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \sim -1.$$

Prvok $(0, 1)$ je teda taký prvok, ktorého druhá mocnina je rovná -1 .

Definícia 1.1.2 — Imaginárna jednotka. Komplexné číslo $(0, 1)$ budeme nazývať *imaginárna jednotka* a budeme ho označovať $j = (0, 1)$.

Pri takomto označení môžeme prvky množiny $\mathbb{C}$ zapisovať v úspornejšom tvare

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \sim x + jy.$$

Definícia 1.1.3 — Algebrický tvar komplexného čísla. Komplexné číslo $z = (x, y)$ môžeme pomocou imaginárnej jednotky zapísať

$$z = x + jy,$$

kde čísla $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ nazývame *reálna* a $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ *imaginárna zložka (časť)* komplexného čísla z .

V ďalšom budeme komplexné čísla písať v algebrickom tvare

$$z = x + jy, \quad \text{kde } j^2 = -1.$$

Definícia 1.1.4 — Mocnina komplexného čísla. Mocnina komplexného čísla z^n , $n \in \mathbb{N}$, je definovaná indukciou

$$z^1 = z, \quad z^{n+1} = z \cdot z^n.$$

R Na základe predošlého zrejme pre mocniny imaginárnej jednotky platí

$$\begin{aligned}j^0 &= 1, \\ j^1 &= j, \\ j^2 &= -1, \\ j^3 &= -j, \\ j^4 &= 1, \\ j^5 &= j, \\ &\text{atď.}\end{aligned}$$

Skutočnosť môžeme všeobecne zapísať pre ľubovoľné prirodzené číslo, $n \in \mathbb{N}$, nasledujúco

$$\begin{aligned} j^{4n} &= 1, \\ j^{4n+1} &= j, \\ j^{4n+2} &= -1, \\ j^{4n+3} &= -j. \end{aligned}$$

Definícia 1.1.5 — Komplexne združené číslo. Komplexné číslo

$$\bar{z} = x - jy$$

nazývame *komplexne združené číslo* ku komplexnému číslu $z = x + jy$.

R Pre komplexné čísla zrejme platí

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), & y &= \operatorname{Im} z = \frac{1}{2j}(z - \bar{z}), \\ \overline{(z_1 + z_2)} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \\ \overline{(z_1 \cdot z_2)} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \\ \overline{(\bar{z})} &= z. \end{aligned}$$

Definícia 1.1.6 — Absolútna hodnota. Reálne číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ nazývame *absolútna hodnota (modul)* komplexného čísla $z = x + jy \in \mathbb{C}$.

R Medzi základné vlastnosti absolútnej hodnoty patrí

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
2. $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$, pre každé $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, pre každé $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Absolútna hodnota komplexného čísla predstavuje vzdialenosť bodu (x, y) od počiatku súradnicového systému $(0, 0)$.

V Definícii 1.1.1 sme zaviedli operáciu sčítania a násobenia komplexných čísel, teraz pomocou nich odvodíme pravidlo delenia. Skutočnosť, že $z\bar{z} = |z|^2$ je vždy reálne nezáporné číslo, využijeme pri definovaní podielu komplexných čísel.

Definícia 1.1.7 — Podiel komplexných čísel. Nech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, kde $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$, pričom $z_2 \neq 0$. Potom podielom týchto dvoch komplexných čísel je

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(\sqrt{x_2^2 + y_2^2})^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Komplexné čísla možno geometricky interpretovať, keď sa reálna časť zobrazí na reálnej osi $\operatorname{Re} z$ a imaginárna časť sa zobrazí na kolmej imaginárnej osi $\operatorname{Im} z$, čím sa každé komplexné číslo zobrazí ako bod v tzv. Gaussovej rovine so súradnicami $z = (x, y)$. Polohu bodu v rovine môžeme okrem kartézskych súradníc zadať napríklad pomocou polárnych súradníc, kde je bod určený vzdialenosťou od počiatku súradnicového systému a orientovaným uhlom, ktorý zvierá polohový vektor s osou x . Tento uhol sa v komplexnej analýze nazýva argument komplexného čísla.

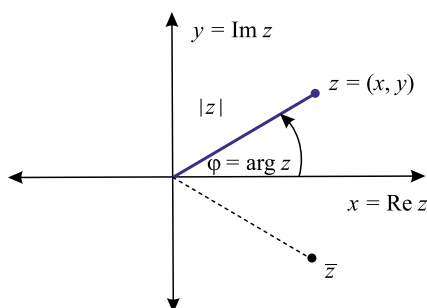
Definícia 1.1.8 — Argument komplexného čísla. Nech $z \in \mathbb{C}^*$, kde $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$, $z = x + jy$, potom každé číslo $\varphi \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \wedge \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

nazveme *argument komplexného čísla* z . Týmto spôsobom jednoznačne určené číslo $\varphi \in [-\pi, \pi)$ nazývame *hlavnou hodnotou argumentu* komplexného čísla z , ozn.: $\varphi = \arg z^a$.

^aOkrem toho je samozrejme argumentom komplexného čísla z aj uhol $\varphi = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V ďalšom budeme mať na mysli, ak neuvedieme inak, hlavnú hodnotu argumentu komplexného čísla.

R Hlavná hodnota argumentu komplexného čísla sa líši od hlavnej hodnoty argumentu komplexne združeného čísla iba znamienkom.



Obr. 1.1.1: Komplexné číslo v Gaussovej rovine

R Vzdialenosť dvoch komplexných čísel (bodov komplexnej roviny) $z_1 = x_1 + jy_1$ a $z_2 = x_2 + jy_2$ je euklidovská, t. j.

$$\Delta(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

■ **Príklad 1.1** Zjednodušte dané výrazy

1. $\frac{1}{j}$,
2. $\frac{(1+j)(2-j)}{(1-j)^2}$,
3. $\frac{2+3j}{1-j}$,
4. $\frac{5+5j}{3-4j} + \frac{20}{4+3j}$.

1. Odstránime imaginárnu jednotku z menovateľa upravovaného výrazu (nikdy nenechávame v menovateli zložku s imaginárnou jednotkou) jednotkou vo vhodnom tvare

$$\frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{-1} = -j.$$

2. Roznásobíme čitateľa ako aj menovateľa a použijeme predošlý postup

$$\frac{(1+j)(2-j)}{(1-j)^2} = \frac{2-j+2j-j^2}{1-2j+j^2} = \frac{2-j+2j+1}{1-2j-1} = \frac{3+j}{-2j} = -\frac{1}{2} + j\frac{3}{2}.$$

3. Na odstránenie komplexného čísla z menovateľa prenasobíme výraz jednotkou v tvare zlomku, ktorého čitateľ aj menovateľ je komplexne združené číslo k menovateľu upravovaného výrazu

$$\frac{2+3j}{1-j} \cdot \frac{1+j}{1+j} = \frac{2+3j+2j+3j^2}{1+1} = \frac{2+5j-3}{2} = \frac{-1}{2} + j\frac{5}{2}.$$

4. Upravíme na spoločného menovateľa

$$\begin{aligned} \frac{5+5j}{3-4j} + \frac{20}{4+3j} &= \frac{(5+5j)(4+3j) + 20(3-4j)}{(3-4j)(4+3j)} \\ &= \frac{20+15j+20j+15j^2+60-80j}{12+9j-16j-12j^2} = \frac{65-45j}{24-7j} = 3-j. \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 1.2** Riešme rovnice v množine $\mathbb{C}$

1. $\left(\frac{1+j}{1-j}\right)^2 + \frac{1}{z} = 1+j,$
2. $\left(5 - \frac{1}{j}\right) \cdot \bar{z} + 2z = 22j.$

1. Vyjadříme neznámu premennú z vhodnými úpravami

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+j}{1-j}\right)^2 + \frac{1}{z} &= 1+j, \\ \frac{1+2j-1}{1-2j-1} + \frac{1}{z} &= 1+j, \\ -1 + \frac{1}{z} &= 1+j, \\ \frac{1}{z} &= 2+j, \\ z &= \frac{1}{2+j} \cdot \frac{2-j}{2-j} = \frac{2-j}{5} = \frac{2}{5} - j\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

2. Do pôvodnej rovnice dosadíme za $z = x + jy$ a $\bar{z} = x - jy$ a upravíme

$$\begin{aligned} \left(5 - \frac{1}{j}\right) \cdot \bar{z} + 2z &= 22j, \\ \left(5 - \frac{1}{j}\right) \cdot (x - jy) + 2(x + jy) &= 22j, \\ (5+j) \cdot (x - jy) + 2(x + jy) &= 22j, \\ 5x - 5yj + xj + y + 2x + 2yj &= 22j, \\ 7x + y + j(x - 3y) &= 22j, \end{aligned}$$

čo platí pre

$$I. \quad 7x + y = 0,$$

$$II. \quad x - 3y = 22.$$

Z II. dostávame $x = 22 + 3y$ a po dosadení do I. platí

$$7(22 + 3y) + y = 0,$$

$$154 + 21y + y = 0,$$

$$22y = -154,$$

$$y = -7,$$

odkiaľ pre x bude

$$x = 22 + 3(-7) = 1.$$

Výsledkom je komplexné číslo $z = 1 - 7j$.

■ **Príklad 1.3** Riešme rovnicu pre neznáme $x, y \in \mathbb{R}$

$$4x(2+j) + y(1+4j) + 7 = x(3+j) - 6y(2j-1) + 9j.$$

Upravíme tak, že prenesieme neznáme na jednu stranu

$$\begin{aligned} 4x(2+j) + y(1+4j) + 7 &= x(3+j) - 6y(2j-1) + 9j, \\ 8x + 4j + y - 4yj + 7 &= 3x + xj - 12yj + 6y + 9j, \\ 5x + 7 - 5y + 8yj - xj - 9j &= 0, \\ 5x - 5y + 7 + j(-3x + 8y - 9) &= 0, \end{aligned}$$

a porovnáme reálnu a imaginárnu zložku

$$\begin{aligned} I.: \quad 5x - 5y + 7 &= 0, & / \cdot (-3) \\ II.: \quad -3x + 8y - 9 &= 0. & / \cdot 5 \end{aligned}$$

Sčítaním vhodných násobkov prvej aj druhej rovnosti máme

$$(-3) \cdot I. + 5 \cdot II.: \quad 55y - 66 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{6},$$

pre x potom platí

$$x = \frac{1}{5}(5y - 7) = \frac{1}{5} \left(5 \cdot \frac{5}{6} - 7 \right) = \frac{-1}{5}.$$

Uvedená rovnica má riešenie práve vtedy, keď $x = \frac{-1}{5}$ a $y = \frac{5}{6}$.

1.2 Trojaký tvar komplexného čísla

Tvar komplexné číslo $z = x + jy$ nazývame *algebraickým tvarom*. Okrem toho každé komplexné číslo $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ môžeme vyjadriť v *goniometrickom (polárnom) tvare*

$$z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi),$$

kde $\varphi = \arg z$ je hlavná hodnota argumentu komplexného čísla z . Ďalším tvarom komplexného čísla $z \in \mathbb{C}^*$ je tzv. *exponenciálny tvar*

$$z = |z|e^{j\varphi}.$$

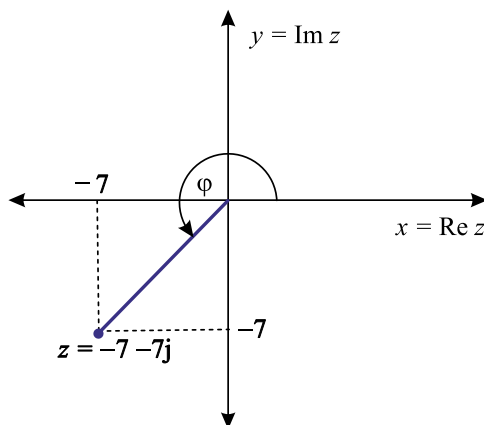
■ **Príklad 1.4** Nájdime goniometrický a exponenciálny tvar komplexného čísla $z = -7 - 7j$.

Absolútna hodnota komplexného čísla $z = -7 - 7j$ je

$$|z| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}.$$

Argument musí spĺňať podmienky

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{-7}{7\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{-7}{7\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2},$$



Obr. 1.2.1: Príklad 1.4

a to je pre uhol $\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.

Preto goniometrický tvar komplexného čísla $z = -7 - 7j$ je

$$z = 7\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

a exponenciálny tvar je

$$z = 7\sqrt{2} \cdot e^{j \frac{5\pi}{4}}.$$

■

1.3 Binomická rovnica

Ak je komplexné číslo z v goniometrickom tvare, tak jeho mocnina má tvar

$$z^n = a = |z|^n (\cos \varphi + j \sin \varphi)^n,$$

použitím *Moiivreovej vety*

$$(\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + j \sin n\varphi),$$

dostávame

$$z^n = a = |z|^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi).$$

Ak následne označíme $\alpha = \arg a$, potom pre číslo a platí $a = |a| (\cos \alpha + j \sin \alpha)$. Porovnaním modulov a argumentov dostávame pre veľkosť komplexného čísla

$$|z| = \sqrt[n]{|a|}$$

a pre jeho argument

$$\begin{aligned} \cos n\varphi &= \cos \alpha, \\ n\varphi &= \alpha + 2k\pi, \\ \varphi &= \frac{\alpha + 2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

A teda vidíme, že *binomická rovnica* $z^n = a$ má n navzájom rôznych koreňovⁱⁱ

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right),$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

■ **Príklad 1.5** Určme $\sqrt[n]{a}$, ak platí

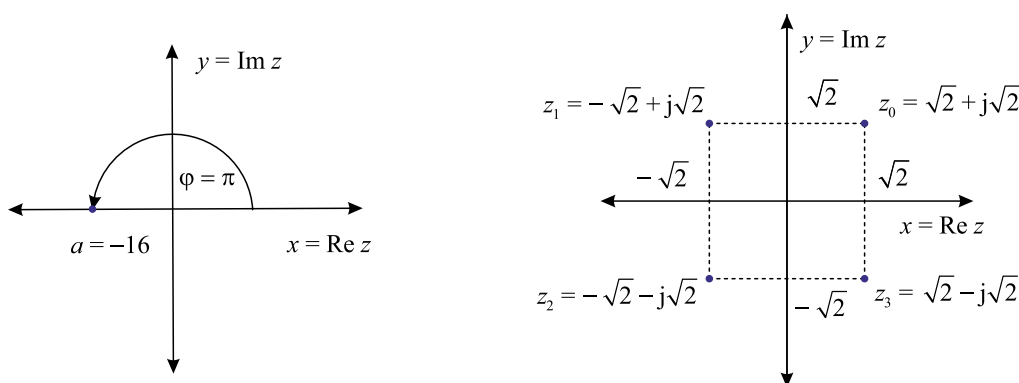
1. $a = -16, n = 4$,
2. $a = j, n = 3$.

1. Podľa uvedeného postupu riešime binomickú rovnicu $z^4 = -16$, keďže $|a| = 16$, platí, že $\sqrt[4]{|a|} = \sqrt[4]{16} = 2$. A takisto platí

$$\cos \alpha = \frac{-16}{16} = -1, \quad \sin \alpha = \frac{0}{16} = 0,$$

odkiaľ pre argument čísla a vyplýva

$$\alpha + 2k\pi = \pi + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$



Obr. 1.3.1: Príklad 1.5 1.

Riešením pre $k = 0, 1, 2, 3$ sú čísla

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + j \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right),$$

konkrétne

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + j\sqrt{2},$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + j \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + j\sqrt{2},$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + j \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} - j\sqrt{2},$$

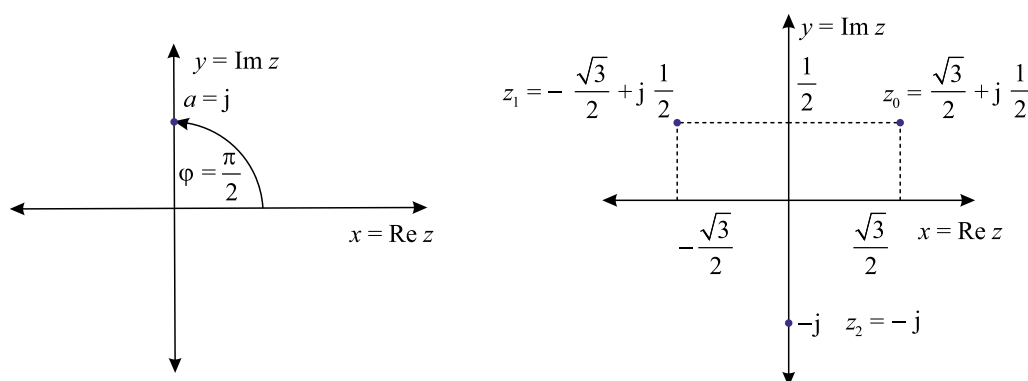
$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + j \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - j\sqrt{2}.$$

ⁱⁱ Riešenia sú body v komplexnej rovine, ktoré tvoria vrcholy pravidelného n -uholníka.

2. Obdobne ako v predošlom pre binomickú rovnicu $z^3 = j$, máme $|a| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ je $\sqrt[3]{|a|} = 1$.

$$\cos \alpha = \frac{1}{1} = 1, \quad \sin \alpha = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2.$$



Obr. 1.3.2: Príklad 1.5 2.

Riešením sú čísla

$$z_0 = 1 \left(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2},$$

$$z_1 = 1 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + j \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2},$$

$$z_2 = 1 \left(\cos \frac{9\pi}{6} + j \sin \frac{9\pi}{6} \right) = 0 - j = -j.$$

■

Na určenie druhej odmocniny komplexného čísla $a = a_1 + j a_2 \neq 0$, je výhodnejšie použiť nasledujúci postup. Nech $z = x + jy = \sqrt{a}$, potom $z^2 = x^2 - y^2 + j 2xy = a_1 + j a_2$. Odkiaľ riešením sústavy kvadratických rovníc $x^2 - y^2 = a_1$ a $2xy = a_2$ dostaneme príslušné reálne hodnoty x, y a tým aj hľadané hodnoty $\sqrt{a}$.

■ **Príklad 1.6** Nájďme všetky hodnoty druhej odmocniny čísel

1. $z = \sqrt{2j},$

2. $z = \sqrt{1 + 2\sqrt{6}j}.$

1. Zrejme platí

$$\sqrt{2j} = z = x + jy,$$

odkiaľ

$$2j = z^2 = x^2 + 2xyj - y^2,$$

čo platí práve vtedy, keď platí

$$I. \quad x^2 - y^2 = 0,$$

$$II. \quad 2 = 2xy.$$

Z druhej rovnice dostávame $x = \frac{1}{y}$, čo po dosadení do prvej je

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2} - y^2 &= 0, \\ 1 - y^4 &= 0, \\ (1 - y)^2 (1 + y)^2 &= 1, \\ y_{1,2} &= \pm 1, \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1.\end{aligned}$$

Riešením sú dve čísla $z_1 = 1 + j$ a $z_2 = -1 - j$.

2. Opäť

$$1 + 2\sqrt{6}j = z^2 = x^2 + 2xyj - y^2,$$

čo platí, keď

$$\begin{aligned}1 &= x^2 - y^2 \quad \wedge \quad 2\sqrt{6} = 2xy \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{y}, \\ 1 &= \frac{6}{y^2} - y^2, \\ y^4 + y^2 - 6 &= 0 \quad / \text{subst.: } t = y^2, \\ t^2 + t - 6 &= 0, \\ (t - 2)(t + 3) &= 0.\end{aligned}$$

Pre $t_1 = 2$ dostávame

$$\begin{aligned}y^2 &= 2, \\ y^2 - 2 &= 0, \\ (y + \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) &= 0.\end{aligned}$$

Pre $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ dostávame $x_{1,2} = \frac{\sqrt{6}}{\pm\sqrt{2}} = \pm\sqrt{3}$. Ďalej pre $t_2 = -3$ máme $y^2 = -3$, čo nemá riešenie na množine $\mathbb{R}$.

Riešením sú teda čísla $z_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}j$ a $z_2 = -\sqrt{3} - \sqrt{2}j$.

■

■ Príklad 1.7 Použitím Moivreovej vety Určme hodnotu $\cos 4\varphi$.

Podľa Moivreovej vety platí

$$(\cos \varphi + j \sin \varphi)^4 = \cos 4\varphi + j \sin 4\varphi.$$

Na druhej strane, podľa binomickej vetyⁱⁱⁱ platí

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + j \sin \varphi)^4 &= \cos^4 \varphi + 4 \cos^3 \varphi (j \sin \varphi) + 6 \cos^2 \varphi (j \sin \varphi)^2 + 4 \cos \varphi (j \sin \varphi)^3 + (j \sin \varphi)^4 \\ &= \cos^4 \varphi + 4j \cos^3 \varphi \sin \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 4j \cos \varphi \sin^3 \varphi + \sin^4 \varphi.\end{aligned}$$

Porovnaním reálnej a imaginárnej zložky dostávame rovnosti

$$\begin{aligned}\cos 4\varphi &= \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi, \\ \sin 4\varphi &= 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi.\end{aligned}$$

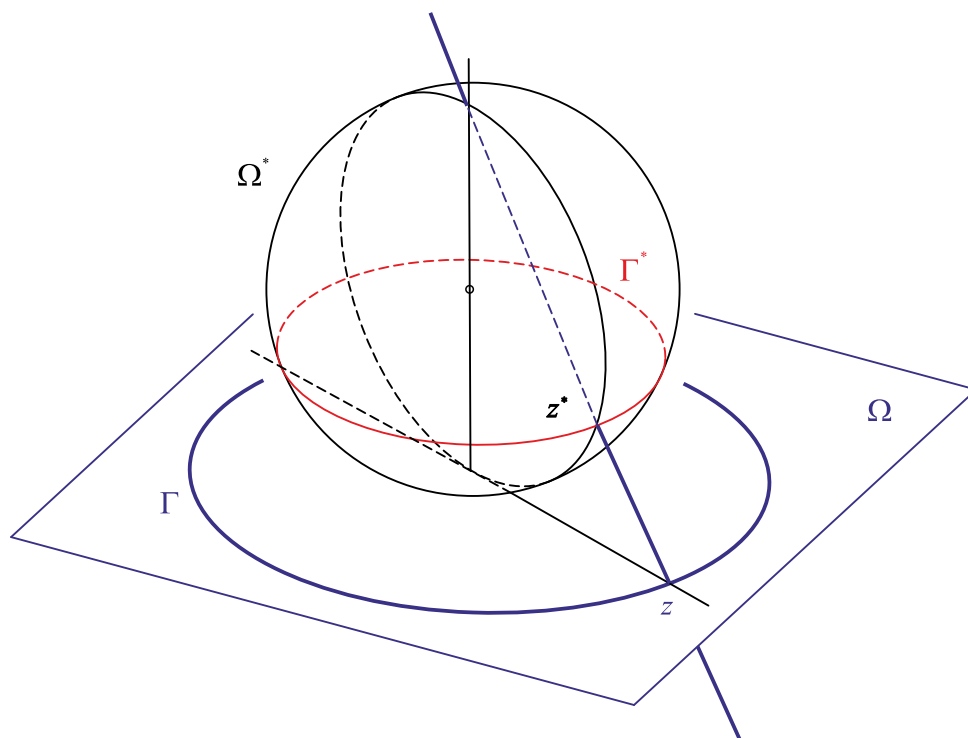
■

ⁱⁱⁱBinomická veta je matematická veta pre rozklad n -tej mocniny dvoch sčítancov na súčet $n + 1$ sčítancov

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

1.4 Nekonečno

Pri predstave rozšírenia komplexnej (Gaussovej) roviny $\mathbb{C}$ na rozšírenú komplexnú (Gaussovu) rovinu $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nám bude nápomocná tzv. stereografická projekcia, t. j. vzájomne jednoznačné priradenie Gaussovej roviny a (Riemannovej) sféry.



Obr. 1.4.1: Riemannova sféra

Riemannova guľa (sféra) môže byť interpretovaná nasledujúcim spôsobom: ide o guľu, ktorá sa južným pólom dotýka počiatku Gaussovej roviny. Ktorémukolvek bodu z z Gaussovej roviny možno priradiť bod na Riemannovej guľe preložením priamky medzi bodom z a severným pólom guľe. Bod, v ktorom sa táto priamka pretne s povrchom Riemannovej guľe, je bod Riemannovej guľe zodpovedajúci bodu z . Severný pól Riemannovej guľe zodpovedá nekonečnu ∞ , čo je v súlade s prirodzenou geometrickou predstavou.

Nevlastný bod (nekonečne vzdialený bod, nekonečno) nemá zavedený pojem reálnej a imaginárnej zložky, ani argument, jeho absolútna hodnota je väčšia ako absolútna hodnota ktoréhokolvek komplexného čísla.

Algebraické operácie s nekonečným bodom sú nasledujúce. Pre každé $z \in \mathbb{C}$, platí

$$\begin{aligned}
 z \pm \infty &= \infty \pm z = \infty, \\
 z \cdot \infty &= \infty \cdot z = \infty, \\
 \frac{z}{\infty} &= 0, \quad \text{tiež} \quad \frac{0}{\infty} = 0, \\
 \frac{\infty}{z} &= \infty, \quad \text{tiež} \quad \frac{\infty}{0} = \infty, \\
 \frac{z}{0} &= \infty.
 \end{aligned}$$

Ďalej definujeme $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} |\infty| &= \infty, \\ -\infty &= \infty, \\ \overline{\infty} &= \infty, \\ \infty^n &= \infty, \\ \infty^{-n} &= 0, \\ 0^{-\infty} &= \infty, \\ \infty^0 &= 1. \end{aligned}$$

1.5 Cvičenia

Cvičenie 1.1 Nájdite goniometrický a exponenciálny tvar komplexných čísel:

a) $z = 5 - j5\sqrt{3}$,

$$\left[\frac{\varepsilon}{x^5} e^{j0} = \left(\frac{\varepsilon}{x^5} \cos 0 + j \frac{\varepsilon}{x^5} \sin 0 \right) 0 \right]$$

b) $z = -\sqrt{3} - j$,

$$\left[\frac{9}{x^7} e^{j2} = \left(\frac{9}{x^7} \cos 2 + j \frac{9}{x^7} \sin 2 \right) 2 \right]$$

c) $z = 3 - j\sqrt{3}$.

$$\left[\frac{9}{x^{11}} e^{j\pi/2} = \left(\frac{9}{x^{11}} \cos \frac{\pi}{2} + j \frac{9}{x^{11}} \sin \frac{\pi}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]$$

Cvičenie 1.2 Zjednodušte nasledujúce výrazy:

a) $\frac{1+j}{1-j}$,

$$\left[\frac{1}{2} \right]$$

b) $\frac{2+j}{2-j} - \frac{2-j}{2+j}$,

$$\left[\frac{1}{8} \right]$$

c) $(-1 - j\sqrt{3})^8$.

$$\left[(1 - j\sqrt{3})^8 \right]$$

d) $\left(\frac{1-j\sqrt{3}}{1+j\sqrt{3}} \right)^{10}$.

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right]$$

Cvičenie 1.3 Určte všetky hodnoty odmocniny komplexného čísla z :

a) $\sqrt{-2 + 2j\sqrt{3}}$,

$$\left[\sqrt{2} e^{j\pi/3}, -\sqrt{2} e^{j\pi/3} \right]$$

b) $\sqrt[4]{1}$,

$$\left[1, j, -1, -j \right]$$

c) $\sqrt[3]{1+j}$,

$$\left[\left(\frac{2}{x^7} \cos \frac{\pi}{6} + j \frac{2}{x^7} \sin \frac{\pi}{6} \right)^{1/3}, \left(\frac{2}{x^7} \cos \frac{\pi}{6} + j \frac{2}{x^7} \sin \frac{\pi}{6} \right)^{1/3} e^{j2\pi/3}, \left(\frac{2}{x^7} \cos \frac{\pi}{6} + j \frac{2}{x^7} \sin \frac{\pi}{6} \right)^{1/3} e^{j4\pi/3} \right]$$

d) $\sqrt[6]{64}$.

$$\left[2, 2e^{j\pi/3}, 2e^{j2\pi/3}, 2e^{j\pi}, 2e^{j4\pi/3}, 2e^{j5\pi/3} \right]$$

Cvičenie 1.4 Použitím Moivreovej vety vyjadrite pomocou funkcií $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ nasledujúce funkcie násobných uhlov:

a) $\sin 3\varphi$,

$$\left[3\sin \varphi - 4\sin^3 \varphi \right]$$

b) $\cos 5\varphi$,

$$\left[\cos^5 \varphi - 5\cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5\cos \varphi \sin^4 \varphi - \sin^5 \varphi \right]$$

c) $\tan 5\varphi$,

$$\left[\frac{5\tan^5 \varphi - 10\tan^3 \varphi + 5\tan \varphi}{1 - 10\tan^2 \varphi + 5\tan^4 \varphi} \right]$$

d) $\cot 5\varphi$.

$$\left[\frac{1 - 10\cot^2 \varphi + 5\cot^4 \varphi}{5\cot^5 \varphi - 10\cot^3 \varphi + 5\cot \varphi} \right]$$

2. Komplexná funkcia komplexnej premennej

2.1 Postupnosti a nekonečné číselné rady komplexných čísel

Uvedieme základné definície a sformulujeme základné vlastnosti komplexných postupností a tiež číselných radov. Dôkazy tvrdení sú zväčša analógiou obdobných tvrdení z teórie reálnej premennej.

Definícia 2.1.1 — Postupnosť komplexných čísel. Nech $z_n = a_n + j b_n$ sú komplexné čísla, kde $n \in \mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0\}$ a $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Potom postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + j b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame *postupnosť komplexných čísel* alebo *komplexná postupnosť*.

Definícia 2.1.2 — Ohraničenosť postupnosti. Hovoríme, že postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *ohraničená*, ak existuje také reálne kladné číslo $M \in \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, že pre všetky prirodzené čísla $n \in \mathbb{N}^*$ platí

$$|z_n| = |a_n + j b_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} < M.$$

R Ostatnú definíciu môžeme geometricky interpretovať tak, že všetky členy postupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ležia vo vnútri kruhu so stredom v začiatku súradnicového systému $(0, 0)$ a polomerom M .

Definícia 2.1.3 — Limita postupnosti komplexných čísel. Komplexné číslo $z_0 \in \mathbb{C}$ nazývame *limitou komplexnej postupnosti* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}^*$ také, že pre všetky $n > n_0$ platí

$$|z_n - z_0| < \varepsilon.$$

Túto skutočnosť zapisujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$.

Postupnosť, ktorá má limitu, nazývame *konvergentná*. Postupnosť, ktorá nie je konvergentná, nazývame *divergentnou*.

Veta 2.1.1 Nech $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + j b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}$, pre všetky $n \in \mathbb{N}^*$, a $z_0 = a_0 + j b_0 \in \mathbb{C}$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ práve vtedy, keď $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ a súčasne $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_0$.

Dôkaz. 1. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$. Potom podľa Definície limity postupnosti 2.1.3 ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}^*$ také, že pre všetky $n > n_0$ platí

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2} < \varepsilon.$$

Odkiaľ priamo vyplýva

$$\sqrt{(a_n - a_0)^2} = |a_n - a_0| < \varepsilon \quad \wedge \quad \sqrt{(b_n - b_0)^2} = |b_n - b_0| < \varepsilon$$

pre všetky $n > n_0$, a teda $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ a tiež $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_0$.

2. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_0$. Potom ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_{0a} \in \mathbb{N}^*$ také, že pre všetky $n > n_{0a}$ platí $|a_n - a_0| < \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2}$ a ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_{0b} \in \mathbb{N}^*$ také, že pre všetky $n > n_{0b}$ platí $|b_n - b_0| < \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2}$. Takisto potom pre všetky $n > \max(n_{0a}, n_{0b})$ platí

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2} < \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2}\right)^2} = \varepsilon,$$

čo znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$. ■

Vidíme, že vyšetrenie konvergenie postupnosti komplexných čísel $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + j b_n\}_{n=1}^{\infty}$, nahrádzame vyšetrením konvergenie dvoch postupností reálnych čísel, konkrétne postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálnych častí a postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ imaginárnych častí.

Vzhľadom na to môžeme tento postup použiť pri výpočte limity postupnosti komplexných čísel $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Preto pre limitu postupnosti komplexných čísel budú platiť obdobné tvrdenia ako pri limite postupnosti reálnych čísel.

Veta 2.1.2 Nech $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}$, pre všetky $n \in \mathbb{N}^*$, potom platí:

1. postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ má práve jednu limitu,
2. ak je postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, potom je ohraničená,
3. nech $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z_0|$,
4. nech $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = z_0 \pm w_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = z_0 \cdot w_0$, ak navyše $w_0 \neq 0$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z_n}{w_n}\right) = \frac{z_0}{w_0}$.

Dôkaz. Obdobný dôkazom pre limitu postupnosti reálnych čísel. ■

■ **Príklad 2.1** Vypočítajme limitu postupnosti komplexných čísel

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + j \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \right),$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^2 + 1}{n+1} + j \sin \frac{1}{n} \right).$

1. Známymi postupmi riešime

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + j \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + j \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^{-1} \right) = 0 + j e^{-1} = \frac{j}{e}.$$

2. Podobne

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^2 + 1}{n + 1} + j \sin \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^2 + 1}{n + 1} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} + j \sin 0 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{-n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} + j 0 \right) = -\infty + 0 = -\infty = \infty.\end{aligned}$$

■

Definícia 2.1.4 — Komplexný rad. Nech $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je komplexná postupnosť.

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$$

nazývame *radom komplexných čísel* alebo *komplexným radom*.

Definícia 2.1.5 — Konvergenca komplexného radu. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je komplexný rad.

Ak k nemu vytvoríme postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned}s_1 &= z_1, \\ s_2 &= z_1 + z_2, \\ &\dots \\ s_i &= z_1 + z_2 + \dots + z_i = \sum_{j=1}^i z_j, \\ &\dots\end{aligned}$$

a limita tejto postupnosti je konvergentná, t. j.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = z,$$

potom hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je *konvergentný* a jeho súčtom je komplexné číslo z . Túto skutočnosť zapisujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z.$$

V opačnom prípade hovoríme, že je rad $\sum_{i=1}^{\infty} z_n$ *divergentný*.

Veta 2.1.3 Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je komplexný rad, kde $z_n = a_n + j b_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Potom tento rad má súčet $z = a + j b$ práve vtedy, keď konvergujú oba rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$.

Dôkaz. Vyplýva priamo z definície komplexného čísla a komutatívnosti. ■

■ **Príklad 2.2** Určme súčet komplexného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{j}{3}\right)^n$.

Na určenie súčtu radu využijeme vzorec pre súčet konvergentného geometrického radu, t. j. pre $|q| < 1$

platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_0 q^{n-1} = \frac{a_0}{1-q}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{j}{3}\right)^n = \left/ \left| \frac{j}{3} \right| < 1 \Rightarrow |j| < 3 \right/ = \frac{\frac{j}{3}}{1 - \frac{j}{3}} = -\frac{1}{10} + j \frac{3}{10}.$$

■

■ **Príklad 2.3** Vyšetrite konvergenciu komplexného radu

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+jn^3}{2^n},$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+jn}{n^2}.$

1. Zrejme platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+jn^3}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} + j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}.$$

Vyšetrite zvlášť rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ a zvlášť rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$. Reálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ vyšetrite pomocou d'Alembertovho kritéria

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_{n+1} \frac{1}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \frac{n+2}{n+1} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

a teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ konverguje. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ vyšetrite tiež pomocou d'Alembertovho kritéria

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| b_{n+1} \frac{1}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^3} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2} < 1,$$

rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ je tiež konvergentný, a teda konvergentným je aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+jn^3}{2^n}$.

2. Prepíšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+jn}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je harmonický rad s mocninou $\alpha = 2 > 1$, a teda konvergentný rad. Avšak harmonický

rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentný, a teda aj komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+jn}{n^2}$ je divergentný.

■

Veta 2.1.4 Rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n, z_n \in \mathbb{C}$, konverguje práve vtedy, keď ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}^*$ také, že pre všetky $n > n_0$ a pre všetky $p \in \mathbb{N}^*$ platí

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dôkaz. Rad je konvergentný, ak je konvergentná postupnosť čiastočných súčtov $s_n = \left\{ \sum_{k=1}^n z_k \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Táto postupnosť je konvergentná, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}^*$ také, že pre všetky $n > n_0$ a pre všetky $p \in \mathbb{N}^*$ platí

$$|s_n - s_{n+p}| < \varepsilon.$$

Po dosadení

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

■

Veta 2.1.5 — Nutná podmienka konverencie radu. Ak konverguje komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

Dôkaz. O platnosti sa môžeme presvedčiť použitím vzťahu $s_{n+1} = s_n + z_{n+1}$ pre čiastočný súčet radu a prejdением k limite pre $n \rightarrow \infty$. ■

R Nutná podmienka konverencie komplexného radu nie je postačujúcou podmienkou. Ale opačne, ak nie je splnená, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$, rad určite diverguje.

Veta 2.1.6 Nech komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ je konvergentný, potom je konvergentný aj komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ a platí

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

Dôkaz. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ je konvergentný, a teda ku každému kladnému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}^*$ také, že pre všetky $n > n_0$ a pre všetky $p \in \mathbb{N}^*$ platí

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Okrem toho tiež platí

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_{n+p}| < \varepsilon,$$

z čoho podľa Vety 2.1.4 konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. ■

Definícia 2.1.6 — Absolútna a relatívna konverencia radu. Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje *absolútne*, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konverguje.

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje *neabsolútne (relatívne)*, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ diverguje.

R Pojem absolútnej konverencie má v prípade komplexných radov oveľa väčší význam, lebo rad $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ je reálny rad s nezápornými členmi.

Pre konvergenciu nekonečných číselných radov komplexných čísel platia analogické kritériá ako pri radoch reálnych čísel. Podrobnejšie si ich pripomenieme nasledujúcimi vetami, ktorých dôkazy priamo vyplývajú z prechádzajúcej Vety 2.1.6 a Definície 2.1.6.

Veta 2.1.7 — Porovnávacie kritérium. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, kde $z_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n > 0$, je konvergentný rad.

(1. *porovnávacie kritérium*) Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}^*$ platí $|z_n| \leq a_n$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolútne konvergentný.

(2. *porovnávacie kritérium*) Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}^*$ platí $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolútne konvergentný.

(*Limitné porovnávacie kritérium*) Ak existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_n|}{a_n} = q < \infty$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolútne konvergentný.

Veta 2.1.8 — d'Alembertovo kritérium. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, kde $z_n \in \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(*d'Alembertovo kritérium*) Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}^*$ platí $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq q < 1$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolútne konvergentný.

Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}^*$ platí $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \geq 1$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ divergentný.

(*Limitné d'Alembertovo kritérium*) Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq q < 1$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolútne konvergentný.

Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \geq 1$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ divergentný.

Veta 2.1.9 — Cauchyho kritérium. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, kde $z_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(*Cauchyho kritérium*) Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}^*$ platí $\sqrt[n]{|z_n|} \leq q < 1$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolútne konvergentný.

Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}^*$ platí $\sqrt[n]{|z_n|} \geq 1$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ divergentný.

(*Limitné Cauchyho kritérium*) Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} \leq q < 1$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolútne konvergentný.

Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} \geq 1$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ divergentný.

Veta 2.1.10 — Raabeho kritérium. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, kde $z_n \in \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(*Raabeho kritérium*) Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}^*$ platí $n \left(1 - \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \right) \geq q > 1$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolútne konvergentný.

Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}^*$ platí $n \left(1 - \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \right) = q > 1$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ divergentný.

(Limitné Raabeho kritérium) Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \right) \geq q > 1$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolútne konvergentný.

Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \right) = q$, kde $q > 1$, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ divergentný.

■ **Príklad 2.4** Vyšetrite absolútnu konvergenciu komplexného radu

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-3j)^n}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-j)^{2n}}$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{jn}$.

1. Použijeme d'Alembertovo kritérium pre komplexný rad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1-3j)^n}{(1-3j)^{n+1}} \right| = \frac{1}{|1-3j|} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} < 1.$$

Rad konverguje absolútne.

2. Použijeme Cauchyho odmocninové kritérium pre komplexný rad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{(n-j)^{2n}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\sqrt{n^2+1})^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0 < 1.$$

Rad konverguje absolútne.

3. Použijeme Cauchyho odmocninové kritérium pre komplexný rad

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{|e^{jn}|} = |e^j| = |\cos 1 + j \sin 1| = \sqrt{\cos^2 1 + \sin^2 1} = \sqrt{1} = 1,$$

odkiaľ vidno, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} e^{jn}$ je divergentný.

■

2.2 Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia 2.2.1 — Komplexná funkcia komplexnej premennej. Zobrazenie z podmnožiny komplexných čísel do rozšírenej množiny komplexných čísel, $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, kde $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sa nazýva *komplexná funkcia komplexnej premennej*

$$f(z) = w(x, y) = u(x, y) + jv(x, y),$$

kde $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ je jej *reálna časť* a $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$ je jej *imaginárna časť* ($x, y \in \mathbb{R}$).

R Upozorníme ešte na jednu dôležitú skutočnosť, oproti funkcii reálnej premennej nevyžadujeme jednoznačnosť zobrazenia $f(z) : D_f \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, a teda toto môže byť mnohoznačné, t. j. jednému $z \in D_f$ môže byť priradených viac bodov $f(z) \in \overline{\mathbb{C}}$.

■ **Príklad 2.5** Určme reálnu a imaginárnu časť funkcie komplexnej premennej

1. $f(z) = z^2 - jz + 1$,
2. $f(z) = \bar{z} - jz^2$,

3. $f(z) = \frac{1}{z}$.

1. Prepíšeme si komplexnú premennú pomocou reálnej časti x a imaginárnej časti y , t. j. $z = x + jy$.
Potom

$$\begin{aligned} f(z) &= w(x, y) = (x + jy)^2 - j(x + jy) + 1 = x^2 + 2jxy - y^2 - jx + y + 1 \\ &= x^2 - y^2 + y + 1 + j(2xy - x). \end{aligned}$$

A vidíme, že reálna časť je

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2 + y + 1$$

a imaginárna časť je

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = 2xy - x.$$

2. Opäť prepíšeme $z = x + jy$ a $\bar{z} = x - jy$. Potom

$$\begin{aligned} f(z) &= w(x, y) = x - jy - j(x + jy)^2 = x - jy - j(x^2 + 2jxy - y^2) \\ &= x - jy - jx^2 + 2xy + jy^2 = x + 2xy + j(-x^2 - y - y^2). \end{aligned}$$

Reálna a imaginárna časť funkcie $f(z)$ je

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = x + 2xy,$$

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = -x^2 - y - y^2.$$

3. Podobne ako vyššie

$$f(z) = w(x, y) = \frac{1}{x + jy} \cdot \frac{x - jy}{x - jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2},$$

odkiaľ

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

■ **Príklad 2.6** Určme inverznú funkciu ku komplexnej funkcii

$$f(z) = \frac{1 + z}{1 + jz}.$$

Pre inverznú funkciu musí zrejme platiť

$$z = \frac{1 + f^{-1}(z)}{1 + jf^{-1}(z)},$$

odkiaľ dostávame vyjadrenie $f^{-1}(z)$ inverznej funkcie k funkcii $f(z)$ v tvare

$$\begin{aligned} z(1 + jf^{-1}(z)) &= 1 + f^{-1}(z), \\ z + jzf^{-1}(z) &= 1 + f^{-1}(z), \\ jzf^{-1}(z) - f^{-1}(z) &= 1 - z, \\ f^{-1}(z)(jz - 1) &= 1 - z, \\ f^{-1}(z) &= \frac{1 - z}{jz - 1}. \end{aligned}$$

■

2.3 Limita a spojitosť funkcie komplexnej premennej

Definícia 2.3.1 — Limita funkcie komplexnej premennej. Hovoríme, že komplexné číslo L je *limitou komplexnej funkcie komplexnej premennej* $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ v čísle (bode) z_0 , ak pre každú postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n \neq L$, pričom z_n patrí do definičného oboru funkcie $f(z)$, ktorá konverguje k bodu (číslu) z_0 , príslušná postupnosť funkčných hodnôt $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje ku komplexnému

číslu L . Túto skutočnosť zapisujeme

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

Veta 2.3.1 — Limita funkcie komplexnej premennej. Funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, kde $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, má v bode $z_0 = x_0 + jy_0 \in \mathbb{C}$ limitu $L = a + jb \in \mathbb{C}$ práve vtedy, keď majú v bode (x_0, y_0) limitu reálne funkcie dvoch premenných $u(x, y)$ a $v(x, y)$, t. j.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a \quad \wedge \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b.$$

Dôkaz. 1. Najprv dokážeme nutnú podmienku existencie limity komplexnej funkcie. Nech teda $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$, potom platí

$$|f(z) - L| = \sqrt{(u(x, y) - a)^2 + (v(x, y) - b)^2} < \varepsilon > 0,$$

a preto na nejakom okolí bodu z

$$\varepsilon > |f(z) - L| \geq |u(x, y) - a|,$$

$$\varepsilon > |f(z) - L| \geq |v(x, y) - b|.$$

Odkiaľ vyplýva existencia limit $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a$ a $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b$.

2. Teraz predpokladajme, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a$ a $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b$. Z definície dostaneme nerovnosti

$$|u(x, y) - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pri ľubovoľnej voľbe kladnej konštanty ε , na nejakom okolí bodu (x_0, y_0) . Potom

$$|f(z) - (a + jb)| \leq |u(x, y) - a| + |v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To dokazuje existenciu $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$. ■

Pre limitu komplexnej funkcie komplexnej premennej $f(z)$ v bode z_0 budú platiť analogické vlastnosti ako pri reálnej premennej, tým máme na mysli nasledujúce tvrdenia, ktorých dôkazy sú analogické analýze reálnej premennej.

Veta 2.3.2 — Vlastnosti limity funkcie komplexnej premennej. Nech existujú $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) =$

$$L_f, \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L_g.$$

1. Funkcia má v bode nanajvyššiu jednu limitu.

$$2. \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |L_f|,$$

$$3. \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = L_f + L_g,$$

$$4. \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) = L_f \cdot L_g,$$

$$5. \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L_f}{L_g}, \text{ ak } L_g \neq 0,$$

$$6. \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 \text{ práve vtedy, keď } \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0,$$

7. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ práve vtedy, keď $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

Veta 2.3.3 — Limita zloženej funkcie komplexnej premennej. Nech existujú $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L_g$, $\lim_{w \rightarrow L_g} f(w) = L_f$, pričom pre všetky z patriace do nejakého prstencového okolia bodu z_0 platí $g(z) \neq L_g$. Potom v bode z_0 existuje limita zloženej funkcie $f(g(z))$ a platí

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(g(z)) = \lim_{w \rightarrow L_g} f(w) = L_f.$$

■ **Príklad 2.7** Vypočítajme limitu funkcie komplexnej premennej

1. $\lim_{z \rightarrow 1+j} \frac{z^2+2j}{z-2j},$

2. $\lim_{z \rightarrow -j} \frac{z^2+(3+j)z+3j}{z^2+1}.$

1. Prvotne skúsime dosadiť priamo za premennú $z = 1 + j$

$$\lim_{z \rightarrow 1+j} \frac{z^2+2j}{z-2j} = \frac{(1+j)^2+2j}{1+j-2j} = \frac{1+2j-1+2j}{1-j} = \frac{4j}{1-j} \cdot \frac{1+j}{1+j} = \frac{4j-4}{2} = -2+2j.$$

2. Po dosadení za premennú $z = -j$ dostaneme neurčitý výraz $[0/0]$, preto výraz upravíme, aby sme eliminovali nulový faktor v čitateli i menovateli, t. j.

$$\lim_{z \rightarrow -j} \frac{z^2+(3+j)z+3j}{z^2+1} = \lim_{z \rightarrow -j} \frac{(z+j)(z+3)}{(z+j)(z-j)} = \lim_{z \rightarrow -j} \frac{(z+3)}{(z-j)} = \frac{-j+3}{-j-j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}j.$$

Definícia 2.3.2 — Spojitosť funkcie komplexnej premennej. Nech je daná funkcia $f(z) : \overline{\mathbb{C}} \supset D_f \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ a množina $A \subset D_f$ a nech bod $z_0 \in A$.

Hovoríme, že funkcia $f(z)$ je *spojitá v bode z_0 vzhľadom na množinu A* práve vtedy, keď k ľubovoľnému okoliu $o(f(z_0))$ existuje okolie $o(z_0)$ také, že $f(o(z_0) \cap A) \subset o(f(z_0))$.

Hovoríme, že funkcia $f(z)$ je *spojitá na množine A* práve vtedy, keď je spojitá vzhľadom na množinu A v každom bode množiny A .

Hovoríme, že funkcia $f(z)$ je *spojitá*, ak je spojitá v každom bode D_f .

Veta 2.3.4 Nech $f(z) : \overline{\mathbb{C}} \supset D_f \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ a $z_0 \in A \subset D_f$ je *hromadný bod*^a množiny A . Potom je funkcia $f(z)$ spojitá v bode z_0 vzhľadom na množinu A práve vtedy, keď platí

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f(z) = f(z_0).$$

^aHromadný bod množiny M je bod, v ktorého prstencovom okolí sa nachádza nekonečne veľa bodov množiny M , pričom samotný bod môže ale nemusí patriť do tejto množiny.

Dôkaz. Vyplýva priamo z Definície 2.3.2. ■

Na základe Definície 2.3.2 a Vety 2.3.1 a vlastností limity funkcie komplexnej premennej vyplývajú nasledujúce tvrdenia.

Veta 2.3.5 Funkcia $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ je v bode $z_0 = x_0 + jy_0$ spojitá práve vtedy, keď sú v bode (x_0, y_0) spojité reálne funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$.

Veta 2.3.6 Nech $f(z) : \overline{\mathbb{C}} \supset D_f \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ a $g(z) : \overline{\mathbb{C}} \supset D_g \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ sú spojité v bode z_0 . Potom aj funkcie $f(z) + g(z)$, $f(z) - g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$, $|f(z)|$ sú spojité v bode z_0 a ak $g(z_0) \neq 0$, tak je spojitá aj funkcia $\frac{f(z)}{g(z)}$ v bode z_0 .

2.4 Komplexná funkcia reálnej premennej

Špeciálnym prípadom komplexnej funkcie je komplexná funkcia reálnej premennej, t. j. zobrazenie $g(t) : \mathbb{R} \supset D_g \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. V tomto prípade (zobrazenie z reálnej osi na komplexnú rovinu) označujeme nezávislú premennú $t \in D_g \subset \mathbb{R}$ a závislú premennú $z \in \overline{\mathbb{C}}$, čiže

$$z = g(t) = x(t) + jy(t),$$

kde $\operatorname{Re} g(t) = x(t)$ a $\operatorname{Im} g(t) = y(t)$.

Nakoľko ide o špeciálny prípad komplexnej funkcie, všetky predchádzajúce tvrdenia o limitách a spojitosti funkcie zostávajú v platnosti.

■ **Príklad 2.8** Vypočítajme $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$, ak $g(t) = \frac{t-j\pi}{t+j\pi} e^{jt}$, kde $t_0 = \pi$.

Dosadíme do funkcie $g(t)$ hodnotu t_0

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{t-j\pi}{t+j\pi} e^{jt} &= \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{t-j\pi}{t+j\pi} (\cos t + j \sin t) = \frac{\pi-j\pi}{\pi+j\pi} \left(\underbrace{\cos \pi}_{-1} + j \underbrace{\sin \pi}_0 \right) \\ &= -\frac{\pi-j\pi}{\pi+j\pi} = \frac{-\pi(1-j)}{\pi(1+j)} = -\frac{1-j}{1+j} \cdot \frac{1-j}{1-j} = -\frac{(1-j)^2}{2} \\ &= -\frac{1-2j-1}{2} = -\frac{-2j}{2} = j. \end{aligned}$$

■

Definícia 2.4.1 Nech je daná funkcia $g(t) : \mathbb{R} \supset D_g \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(t) = x(t) + jy(t),$$

kde $t \in [a, b] \subset D_g$. Potom určitý, resp. neurčitý integrál funkcie $g(t)$ definujeme nasledujúco

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b x(t) dt + j \int_a^b y(t) dt,$$

resp.

$$\int g(t) dt = \int x(t) dt + j \int y(t) dt,$$

ak integrály na pravej strane rovností existujú.

■ **Príklad 2.9** Integrujme komplexnú funkciu reálnej premennej

$$1. \int_0^1 \frac{1+jt}{1-jt} dt,$$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} e^{jnt} dt, \text{ kde } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Hľadáme primitívnu funkciu vzhľadom na premennú t

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1+jt}{1-jt} dt &= \int_0^1 \frac{1+jt}{1-jt} \frac{1+jt}{1+jt} dt = \int_0^1 \frac{1+2jt-t^2}{1+t^2} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + j \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{t^2+1}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= [\arctan t]_0^1 + j [\ln |1+t^2|]_0^1 - [t]_0^1 + [\arctan t]_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{4} - 0 + j (\ln 2 - \ln 1) - 1 + 0 + \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{2} - 1 + j \ln 2.
 \end{aligned}$$

2. Exponenciálny tvar si prepíšeme na goniometrický

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} e^{jnt} dt &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nt + j \sin nt) dt = \left/ \begin{array}{c} s = nt \\ ds = ndt \\ t \parallel \begin{array}{cc} \pi & -\pi \\ s & n\pi \quad -n\pi \end{array} \end{array} \right/ \\
 &= \left[\frac{1}{n} \sin s - j \frac{1}{n} \cos s \right]_{-n\pi}^{n\pi} \\
 &= \frac{1}{n} \sin n\pi - j \frac{1}{n} \cos n\pi - \frac{1}{n} \sin n(-\pi) + j \frac{1}{n} \cos n(-\pi) \\
 &\quad \left/ \begin{array}{c} \sin(-\varphi) = -\sin \varphi \\ \cos(-\varphi) = \cos \varphi \end{array} \right/ \\
 &= \frac{1}{n} \underbrace{\sin n\pi}_{=0} - j \frac{1}{n} \underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n} + \frac{1}{n} \underbrace{\sin n\pi}_{=0} + j \frac{1}{n} \underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n} \\
 &= -j \frac{1}{n} (-1)^n + j \frac{1}{n} (-1)^n = 0.
 \end{aligned}$$

Definícia 2.4.2 — Jordanova krivka. Každé spojité zobrazenie $g(t) : \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sa nazýva krivka v Gaussovej rovine.

Bod $g(a)$ sa nazýva *začiatkový* a bod $g(b)$ sa nazýva *koncový bod krivky* g .

Krivka g je *uzavretá*, ak platí $g(a) = g(b)$.

Krivka g sa nazýva *jednoduchá*, ak pre všetky čísla $t_1, t_2 \in [a, b]$ také, že $0 < |t_2 - t_1| < b - a$ platí

$$g(t_1) \neq g(t_2).$$

Každá jednoduchá uzavretá krivka sa nazýva *Jordanova krivka*.

Dôsledok 2.4.1 — Graf krivky. Ak $g(t) : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ je krivka, potom množina bodov z roviny $\Gamma = g([a, b])$ sa nazýva *graf krivky* $g(t)$.

Definícia 2.4.3 — Hladká krivka. Krivku $g(t) : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ nazývame *hladkým oblúkom*, ak má v každom bode $t \in [a, b]$ spojité a nenulovú prvú deriváciu $g'(t)$.

Definícia 2.4.4 — Po častiach hladká krivka. Krivka g je *po častiach hladká krivka*, ak existuje delenie intervalu $[a, b]$, dané deliacimi bodmi $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ tak, aby platilo $[a, b] = \bigcup_{k=1}^m [t_{k-1}, t_k]$, že na každom z týchto podintervalov je prvá derivácia $g'(t)$ spojitá a nenulová.

R Pochopiteľne nepredpokladáme existenciu derivácie v deliacich bodoch, ale týchto je nanajvýš spočítateľne veľa.

R Ak Γ je označením krivky, potom $g(t)$ označujeme ako *parametrizáciu krivky* Γ . Jedna krivka môže mať niekoľko rôznych parametrických vyjadrení.

Definícia 2.4.5 — Orientácia krivky. Nech $g(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je Jordanova krivka a množina $\Gamma = \{g(t) \in \mathbb{C} \mid t \in [a, b]\}$ je jej graf.

Hovoríme, že *krivka* g je *kladne orientovaná*, ak pri zmene t od a do b sa bod $g(t)$ pohybuje po grafe Γ proti smeru pohybu hodinových ručičiek.

V opačnom prípade je krivka *záporne orientovaná*.

R Niekedy sa kladný smer orientácie krivky definuje aj tak, že pri prechode po krivke v smere jej orientácie sa jej vnútro nachádza na ľavej strane od pozorovateľa.

Dôsledkom predchádzajúcich predstáv je tzv. Jordanova veta, ide o triviálne tvrdenie (s netriviálnym dôkazom), že každá Jordanova krivka rozdelí rovinu na dve disjunktné oblasti: vnútro a vonkajšok krivky.

R *Jordanova veta:* Nech $g(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je Jordanova krivka s grafom Γ . Potom platí

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad \wedge \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset,$$

kde Ω_1, Ω_2 sú jednoducho súvislé oblasti, pre ktoré platí

$$\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = \Gamma,$$

kde $\partial\Omega$ predstavuje hranicu oblasti Ω .

Definícia 2.4.6 — Vnútro a vonkajšok krivky. Nech $g(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je Jordanova krivka s grafom Γ a nech $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$ je predchádzajúci rozklad.

Potom oblasť, ktorá obsahuje bod ∞ , nazývame *vonkajškom krivky* Γ (ozn.: $\text{ext}\Gamma$) a druhá z nich je *vnútrom krivky* Γ (ozn.: $\text{int}\Gamma$).

Definícia 2.4.7 — Otvorená množina. Množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ je *otvorená* množina práve vtedy, keď s každým svojím bodom $z \in \Omega$ obsahuje aj isté jeho ε -okolie $o(z, \varepsilon) \subset \Omega$.

Definícia 2.4.8 — Súvislá množina. Množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ *nie je súvislá* množina práve vtedy, keď existujú dve disjunktné množiny G a H také, že platí

1. $\Omega \subset G \cup H$,
2. $G \cap \Omega \neq \emptyset$ a $H \cap \Omega \neq \emptyset$.

V opačnom prípade nazveme množinu Ω *súvislou*.

Definícia 2.4.9 — Oblasť. Otvorená súvislá množina sa nazýva *oblasť*.

Komplexné číslo v Gaussovej rovine môžeme chápať ako bod v tejto rovine. Podobne si môžeme predstaviť tento bod ako koncový bod vektora so začiatkom v súradnicovom systéme. Tým pádom aj komplexná

ⁱSpočítateľná množina je množina, ktorá má v istom zmysle nanajvýš „rovnako veľa“ prvkov ako množina prirodzených čísel. Presne je spočítateľná množina definovaná ako množina, ktorú možno bijektívne zobrazit na podmnožinu prirodzených čísel.

spojitá funkcia reálnej premennej $g(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, opisuje v Gaussovej rovine krivku Γ s parametrickým vyjadrením $z = g(t) = x(t) + j \cdot y(t)$, ktorú nazývame *hodograf*.

■ **Príklad 2.10** Určte hodograf komplexnej funkcie reálnej premennej $g(t)$ na príslušnom intervale a geometricky ho interpretujte:

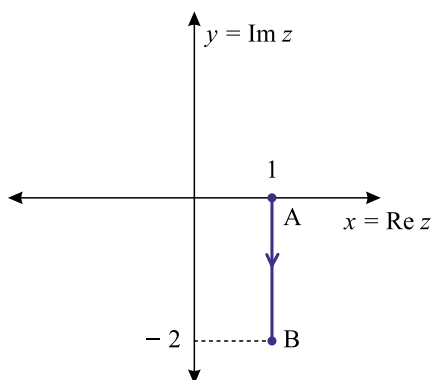
1. $g(t) = 1 - jt$, pre $t \in [0, 2]$,
2. $g(t) = t + 1 + 3jt$, pre $t \in (-\infty, \infty)$,
3. $g(t) = 2 + t + j(1 + t)$, pre $t \in [1, 2]$,
4. $g(t) = t + \frac{j}{t}$, pre $t \in [1, \infty)$,
5. $g(t) = e^t + je^{2t}$, pre $t \in [0, 1]$,
6. $g(t) = e^{2jt} - j$, pre $t \in [0, 2\pi]$,
7. $g(t) = 2(\cos t + j \sin t)$, pre $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

1. Vyjadríme si reálnu a imaginárnu zložku

$$x(t) = 1,$$

$$y(t) = -t, \quad t \in [0, 2].$$

Hodografom je úsečka $\overline{AB}$ so začiatočným bodom $A = (1, 0)$ a koncovým bodom $B = (1, -2)$.



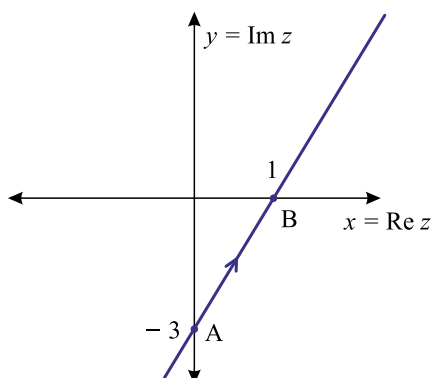
Obr. 2.4.1: Hodograf z Príkladu 2.10 1.

2. Zo zložkového vyjadrenia dostávame

$$x(t) = t + 1 \quad \Rightarrow \quad t = x - 1,$$

$$y(t) = 3t \quad \Rightarrow \quad y = 3(x - 1) = 3x - 3, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Hodografom je priamka $\overleftrightarrow{AB}$ pretínajúca os o_y v bode $A = (0, -3)$ a os o_x v bode $B = (1, 0)$.



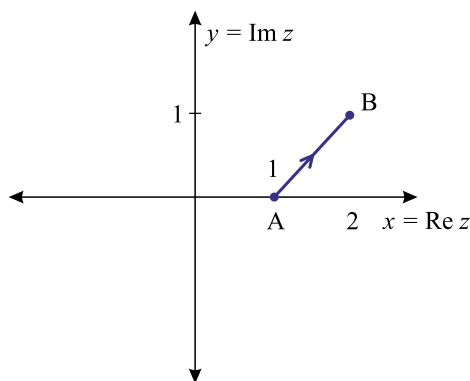
Obr. 2.4.2: Hodograf z Príkladu 2.10 2.

3. Podobne

$$x(t) = 2 + t \Rightarrow t = x - 2,$$

$$y(t) = 1 + t \Rightarrow y = 1 + x - 2 = x - 1, \quad t \in [1, 2].$$

Hodografom je úsečka $\overline{AB}$ so začiatočným bodom $A = (1, 0)$ a koncovým bodom $B = (2, 1)$.



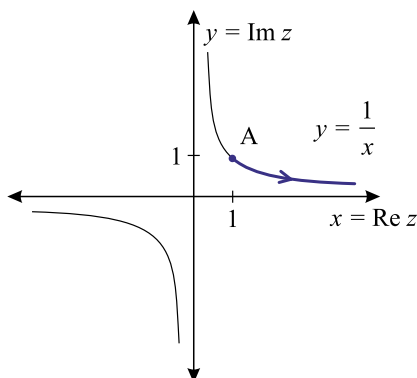
Obr. 2.4.3: Hodograf z Príkladu 2.10 3.

4. Zo zložkového vyjadrenia

$$x(t) = t,$$

$$y(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in [1, \infty),$$

je jasné, že hodografom je oblúk hyperboly $AB : y = \frac{1}{x}$ so začiatočným bodom $A = (1, 1)$ do nekonečna.



Obr. 2.4.4: Hodograf z Príkladu 2.10 4.

5. Parametricky je funkcia daná

$$x(t) = e^t,$$

$$y(t) = e^{2t}, \quad t \in [0, 1],$$

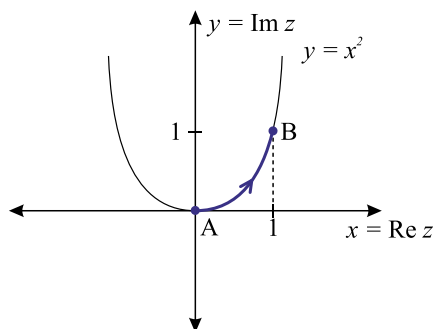
ak odrátame od kvadrátu prvej zložky druhú, dostaneme zrejme nulu

$$e^{2t} - e^{2t} = 0,$$

a teda

$$x^2 - y = 0 \Rightarrow y = x^2, \quad x \in [e^0 = 1, e^1 = e].$$

Hodografom je oblúk paraboly $AB : y = x^2$ so začiatočným bodom $A = (1, 1)$ a koncovým bodom $B = (e, e^2)$.



Obr. 2.4.5: Hodograf z Príkladu 2.10 5.

6. Prepíšeme si funkciu v goniometrickom tvare

$$g(t) = e^{2jt} - j = \cos 2t + j \sin 2t - j,$$

odkiaľ

$$x(t) = \cos 2t \quad \Rightarrow \quad x^2 = \cos^2 2t,$$

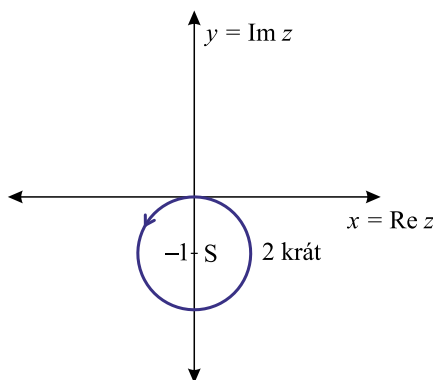
$$y(t) = \sin 2t - 1 \quad \Rightarrow \quad (y+1)^2 = \sin^2 2t,$$

čo v rovnosti zrejme dáva

$$\cos^2 2t + \sin^2 2t = 1,$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 1.$$

Hodografom je dvojnásobná kružnica so stredom v $S = (0, -1)$ a polomerom $\rho = 1$.



Obr. 2.4.6: Hodograf z Príkladu 2.10 6.

7. Parametricky

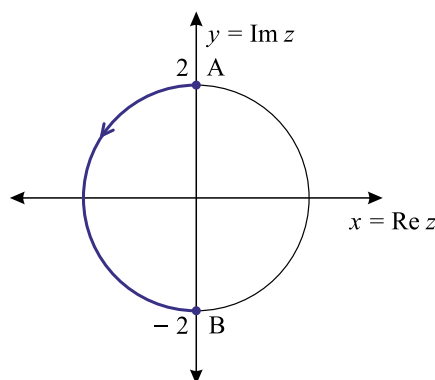
$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 2 \cos t, \\ y(t) = 2 \sin t, \end{array} \right\} \begin{array}{l} /()^2 \\ /()^2 \end{array} \Bigg\}^+$$

$$4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 4,$$

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Hodografom je časť kružnice so stredom v $S = (0, 0)$ a polomerom $\rho = 2$ so začiatočným bodom $A = (0, 2)$ a koncovým bodom $B = (0, -2)$.

■



Obr. 2.4.7: Hodograf z Příkladu 2.10 7.

2.5 Cvičenia

Cvičenie 2.1 Vypočítajte limitu postupnosti komplexnej premennej:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + j \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right),$ [e]
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 - 3n + 4}{3n^2 - 2} + j \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right),$ [$j + \frac{2}{3}$]
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1} + j^{n+1}}{3^n + j^n} \right).$ [3]

Cvičenie 2.2 Nájdite súčet radu:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+j)^n},$ [$\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$]
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{j}{n(n+1)} \right).$ [$\frac{1}{2} + j$]

Cvičenie 2.3 Vyšetrite konvergenciu radu:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2j)^n},$ [konverguje abs.]
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{j}{n} \right)^n,$ [diverguje]
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} j^n.$ [konverguje abs.]

Cvičenie 2.4 Určte reálnu a imaginárnu časť funkcie:

- a) $f(z) = z^2 + 1,$ $\left[\begin{array}{l} \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 1, \operatorname{Im} f(z) = 2xy \\ \operatorname{Re} f(z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{pre } x > 0, y \in \mathbb{R} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pre } x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & \text{pre } x < 0, y \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{pre } x = 0, y < 0 \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x}, & \text{pre } x < 0, y < 0 \end{cases} \end{array} \right]$
 b) $f(z) = \arg z,$ $\left[\begin{array}{l} \operatorname{Re} f(z) = 0 \\ \operatorname{Im} f(z) = 0 \end{array} \right]$
 c) $f(z) = \frac{z+1}{jz+1},$ $\left[\begin{array}{l} \operatorname{Re} f(z) = \frac{1+x+y}{1-x-x^2-y^2}, \operatorname{Im} f(z) = \frac{x^2+y^2-2x-1}{1-x-x^2-y^2} \end{array} \right]$

d) $f(z) = j|z-1|$.

$$\left[\sqrt{z^2 + (1-x)^2} = (z)f_{\text{Im}}(z) = (z)f_{\text{Re}}(z) \right]$$

Cvičenie 2.5 Vypočítajte:

a) $\lim_{z \rightarrow j} \frac{3z^4 - 2z^2 - 2z + 5}{z-j}$,

$$[4 + 4j]$$

b) $\lim_{z \rightarrow -j} \frac{z^2 + 1}{z^3 + jz^2 - z - j}$.

$$[1]$$

Cvičenie 2.6 Vypočítajte integrály komplexnej funkcie reálnej premennej:

a) $\int_0^1 (1-jt)^2 dt$,

$$[1 - \frac{5}{2}j]$$

b) $\int_0^1 \frac{1-jt}{1+jt} dt$,

$$[2 \ln 1 - 1 - \frac{2}{x}]$$

c) $\int_1^2 \left(1 + \frac{j}{t}\right)^2 dt$,

$$[1 + \frac{2}{3}j]$$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cdot e^{jt} dt$.

$$[0]$$

Cvičenie 2.7 Určte hodograf funkcie $g(t)$:

a) $g(t) = a \cos t + jb \sin t$, kde $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ a $t \in (-\infty, \infty)$,

$$\left[1 = \frac{z^b}{z^2} + \frac{z^b}{z^2} \right]$$

b) $g(t) = t^2 + \frac{j}{t^2}$, kde $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$[0 < x \text{ and } \frac{x}{1} = \frac{1}{x} \text{ pre } x > 0]$$

c) $g(t) = ae^{jt} + \frac{1}{a}e^{-jt}$, kde $a \in \mathbb{R}_{>0}$ a $t \in (-\infty, \infty)$,

$$\left[1 = \frac{z^{\left(\frac{v}{1} - v\right)}}{z^2} + \frac{z^{\left(\frac{v}{1} + v\right)}}{z^2} \right]$$

d) $g(t) = t + j\sqrt{1-t^2}$, kde $a \in \mathbb{R}_{>0}$ a $t \in [-1, 1]$.

$$[0 \geq x \text{ and } 1 = \frac{x}{z^2} + \frac{x}{z^2}]$$

3. Derivácia funkcie a holomorfná funkcia

3.1 Derivácia funkcie komplexnej premennej

Definícia 3.1.1 — Derivácia funkcie komplexnej premennej v bode. Hovoríme, že komplexná funkcia komplexnej premennej $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ má v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ *deriváciu* $f'(z_0)$ práve vtedy, keď existuje konečná limita

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

^aV ďalšom sa pod pojmom komplexná funkcia bude myslieť vo všeobecnosti komplexná funkcia komplexnej premennej.

R Ak označíme *prírastok nezávislej premennej* $z - z_0 = \Delta z \in \mathbb{C}$, môžeme tiež deriváciu komplexnej funkcie v bode definovať ako

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0).$$

V predchádzajúcej limite sme predpokladali $\Delta z \rightarrow 0$, pričom je toto číslo komplexné, preto sa k nule môžeme blížiť mnohými rôznymi spôsobmi na rozdiel od reálnej limity, kedy máme v podstate dve možnosti: $\Delta x \rightarrow 0^+$ alebo $\Delta x \rightarrow 0^-$. Skutočnosť, že má komplexná funkcia v bode deriváciu, znamená, že všetky definujúce limity vychádzajú rovnako pri všetkých spôsoboch, ktorými sa Δz blíži k nule.

R Derivácie vyšších rádov komplexnej funkcie zavádzame obvyklým spôsobom.

R Pokiaľ existuje $f'(z_0)$, je komplexná funkcia $f(z)$ definovaná v istom okolí bodu z_0 , čo je implicitne obsiahnuté v požiadavke existencie limity v Definícii 3.1.1.

Definícia 3.1.2 — Diferenciál komplexnej funkcie v bode. Hovoríme, že komplexná funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ diferencovateľná, ak existuje číslo $A \in \mathbb{C}$ a funkcia $\eta(\Delta z)$ spojitá v bode 0 a nadobúdajúca v tomto bode hodnotu 0 také, že pre všetky Δz z okolia bodu 0 sa dá prírastok funkcie vyjadriť v tvare

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \cdot \Delta z + \Delta z \cdot \eta(\Delta z). \quad (3.1)$$

Výraz $A \cdot \Delta z$ nazývame *diferenciál funkcie $f(z)$ v bode z_0* a označujeme ho $df(z_0)$.

Veta 3.1.1 Komplexná funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ *diferencovateľná* práve vtedy, keď má v bode z_0 deriváciu a platí

$$df(z_0) = f'(z_0) \cdot \Delta z.$$

Dôkaz. Nech existuje limita $f'(z_0)$, potom má funkcia $\eta(\Delta z)$ definovaná (v istom okolí bodu 0) vzťahom

$$\eta(\Delta z) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta z} (f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)) - f'(z_0), & \text{pre } \Delta z \neq 0, \\ 0, & \text{pre } \Delta z = 0, \end{cases}$$

v bode 0 limitu 0, takže je v 0 spojitá. Funkcia $\eta(\Delta z)$ vyhovuje rovnosti (3.1) Definície 3.1.2 pre $A = f'(z_0)$. Nech naopak existuje diferenciál funkcie $f(z)$ v bode z_0 , potom platí rovnosť (3.1) Definície 3.1.2 na istom okolí bodu 0 a pre určitú konštantu A , pričom $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \eta(\Delta z) = \eta(0) = 0$. Pre $\Delta z \neq 0$ vyplýva z (3.1) Definície 3.1.2 rovnosť

$$\frac{1}{\Delta z} (f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)) = A + \eta(\Delta z).$$

Pravá strana má pre $\Delta z \rightarrow 0$ limitu rovnú číslu A , odkiaľ je zrejmé, že i ľavá strana má pre $\Delta z \rightarrow 0$ konečnú limitu, tým pádom existuje $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$. ■

■ **Príklad 3.1** Vypočítajme deriváciu funkcie komplexnej premennej $f'(z)$, ak

1. $f(z) = z^n, n \geq 1$,
2. $f(z) = z \operatorname{Re} z$

1. Podľa definície hľadáme limitu

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z \cdot z_0^{n-2} + z_0^{n-1}) \\ &= n z_0^{n-1}. \end{aligned}$$

2. Funkcia $f(z = x + jy) = z \operatorname{Re} z = x^2 + jxy$ je spojitá na $\mathbb{C}$, keďže funkcia $\operatorname{Re} f(z) = x^2$ a aj $\operatorname{Im} f(z) = xy$ sú spojité na $\mathbb{R}^2$. Vypočítajme teraz deriváciu v bode $z_0 = 0$. Podľa definície platí

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Re} z = 0,$$

čiže $f'(0) = 0$.

Nech $z_0 = x_0 + jy_0 \neq 0$, v takom prípade môžeme písať

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x^2 - x_0^2 + j(xy - x_0y_0)}{x - x_0 + j(y - y_0)}.$$

Najskôr vypočítame limitu pre $z \rightarrow z_0$ po priamke $x = x_0$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ x = x_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x = x_0}} \frac{x^2 - x_0^2 + j(xy - x_0y_0)}{x - x_0 + j(y - y_0)} = \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x = x_0}} \frac{jx_0(y - y_0)}{j(y - y_0)} = x_0 = \operatorname{Re} z_0.$$

Podobne $z \rightarrow z_0$ po priamke $y = y_0$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ y = y_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y = y_0}} \frac{x^2 - x_0^2 + j(xy - x_0y_0)}{x - x_0 + j(y - y_0)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y = y_0}} (x - x_0) + jy_0 \\ &= x_0 - x_0 + jy_0 = \operatorname{Re} z_0 + z_0. \end{aligned}$$

Pre $z_0 \neq 0$ sa $\operatorname{Re} z_0 \neq \operatorname{Re} z_0 + z_0$, a preto funkcia $f(z) = z \operatorname{Re} z$ nemá deriváciu v žiadnom bode $z \neq 0$. ■

Veta 3.1.2 — Základné vlastnosti derivácie komplexnej funkcie komplexnej premennej.

Nech $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ a $g(z) : \mathbb{C} \supset D_g \rightarrow \mathbb{C}$ sú dve komplexné funkcie, ktoré majú v bode z_0 deriváciu. Potom majú v bode z_0 deriváciu aj nasledujúce funkcie a platí

1. $(cf)'(z_0) = c \cdot f'(z_0), \forall c \in \mathbb{C},$
2. $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0),$
3. $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0),$
4. ak okrem toho ešte platí $g(z_0) \neq 0$, tak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

5. Nech v bode $w_0 = g(z_0)$ má deriváciu komplexná funkcia $f(z)$, potom má zložená funkcia $f \circ g$ v bode z_0 deriváciu a platí

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0).$$

6. Nech funkcia $f(z)$ definuje zobrazenie, ktoré je homeomorfizmus^a a nech $w_0 = f(z_0)$. Potom má aj funkcia $f^{-1}(w)$ deriváciu v bode w_0 a platí

$$f^{-1}(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

^aHomeomorfizmus alebo topologický izomorfizmus je v topológii spojitá bijektívne zobrazenie medzi dvoma topologickými priestormi, ktoré má spojitú inverznú zobrazenie.

■ **Príklad 3.2** Vypočítajme deriváciu funkcie komplexnej premennej $f'(z)$, ak je táto daná

$$f(z) = 1 + j + 2jz^5 + (z^3 - jz + 1)(z^4 + 3z^2 - j) + \frac{z^6 + z}{z^3 - z^2 + 1}.$$

Derivujeme funkciu podľa premennej z obvyklým postupom

$$\begin{aligned} f'(z) &= 10jz^4 + (3z^2 - j)(z^4 + 3z^2 - j) + (z^3 - jz + 1)(4z^3 + 6z) \\ &\quad + \frac{(6z^5 + 1)(z^3 - z^2 + 1) - (z^6 + z)(3z^2 - 2z)}{(z^3 - z^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

■

Dôsledok 3.1.3 Ak má komplexná funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ v bode z_0 deriváciu, je v tomto bode spojitá a konečná.

Nasledujúce tvrdenie je jediným podstatným rozdielom oproti diferenciálnemu počtu reálnej premennej.

Dôsledok 3.1.4 Ak má komplexná funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ deriváciu na nejakej oblasti, potom má na tejto oblasti spojité derivácie ľubovoľného rádu.

Definícia 3.1.3 — Holomorfnosť funkcie komplexnej premennej. Hovoríme, že funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je *holomorfná v bode* $z_0 \in D_f$, ak v istom okolí bodu z_0 má deriváciu $f'(z)$. Hovoríme, že funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je *holomorfná v oblasti* $\Omega \subset D_f$, ak existuje okolie bodu z_0 , že má $f(z)$ deriváciu v každom bode tohto okolia.

Definícia 3.1.4 — Regulárny a singulárny bod. Nech $z_0 \in \mathbb{C}$ je ľubovoľný bod komplexnej roviny a nech je daná funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$.

Bod z_0 sa nazýva *regulárny bod funkcie* $f(z)$, ak $f(z)$ je v bode z_0 holomorfná.

Bod z_0 sa nazýva *singulárny bod funkcie* $f(z)$, ak $f(z)$ nie je v bode z_0 holomorfná.

Definícia 3.1.5 — Izolovaný singulárny bod. Nech $z_0 \in \mathbb{C}$ je ľubovoľný bod rozšírenej komplexnej roviny a nech je funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfná v prstencovom okolí bodu z_0 , ale nie je holomorfná v bode z_0 .

Potom bod z_0 sa nazýva *izolovaný singulárny bod funkcie* $f(z)$.

R Ak je funkcia holomorfná v bode, potom je v tomto bode diferencovateľná. Naopak to neplatí. Vid'. Príklad 3.1.1, v bode $z_0 = 0$ má funkcia $f(z) = z \operatorname{Re} z$ deriváciu, ale nie je holomorfná, lebo neexistuje okolie tohto bodu, v ktorom by mala deriváciu.

Veta 3.1.5 — L'Hospitalovo pravidlo pre funkcie komplexnej premennej. Nech funkcie $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ a $g(z) : \mathbb{C} \supset D_g \rightarrow \mathbb{C}$ sú holomorfné v oblasti $\Omega \subset D_f \cap D_g$, nech pre $z_0 \in \Omega$ platí $f(z_0) = g(z_0) = 0$, pričom platí $g'(z_0) \neq 0$. Potom platí

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dôkaz. Pre holomorfné funkcie v bode $z_0 \in \Omega$ existuje také okolie bodu z_0 , že pre všetky $z \neq z_0$ z tohto okolia platí

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}, \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

čo bolo treba dokázať. ■

R Vhodnými algebrickými úpravami môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na neurčité výrazy typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0 \cdot \infty], [\infty - \infty]$.

■ **Príklad 3.3** Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítajte nasledujúce limity

1. $\lim_{z \rightarrow j} \frac{z^6 + 1}{z^4 - 1},$

$$2. \lim_{z \rightarrow 1-j} \frac{z^3 + 2(j-1)z^2 - 3jz + 1 + j}{z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4}.$$

1. Riešime obvyklým spôsobom

$$\lim_{z \rightarrow j} \frac{z^6 + 1}{z^4 - 1} = \lim_{z \rightarrow j} \frac{6z^5}{4z^3} = \frac{6j^5}{4j^3} = -\frac{3}{2}.$$

2. Podobne

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1-j} \frac{z^3 + 2(j-1)z^2 - 3jz + 1 + j}{z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4} &= \lim_{z \rightarrow 1-j} \frac{3z^2 + 4(j-1)z - 3j}{4z^3 - 9z^2 + 4z + 2} \\ &= \frac{3(1-j)^2 + 4(j-1)(1-j) - 3j}{4(1-j)^3 - 9(1-j)^2 + 4(1-j) + 2} \\ &= \frac{-j}{-2 + 6j} = -\frac{3}{20} + \frac{1}{20}j. \end{aligned}$$

■

3.2 Cauchyho-Riemannove rovnice

Dostávame sa k tomu, v čom sa pojmy derivácie komplexnej funkcie a derivácie reálnej funkcie navzájom líšia. Tento rozdiel tvorí podstatu odlišností analýzy komplexnej a reálnej premennej.

Veta 3.2.1 — Cauchyho-Riemannove rovnice. Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ má deriváciu $f'(z)$ v bode $z_0 = x_0 + jy_0$.

Potom funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ majú parciálne derivácie prvého rádu v bode z_0 , pre ktoré v tomto bode platia *Cauchyho-Riemannove rovnice*

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (3.2)$$

Dôkaz. Pre deriváciu funkcie $f(z)$ v bode $z_0 = x_0 + jy_0$ platí

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Pri označení $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$, $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$, má tento vzťah tvar

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + j(v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0))}{\Delta x + j\Delta y}.$$

Pre $\Delta z = \Delta x + j\Delta y \rightarrow 0$, špeciálne $\Delta y = 0$, dostávame

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + j \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + j \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Podobne pre $\Delta x = 0$ máme

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{j\Delta y} + j \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{j\Delta y} \\ &= -j \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Porovnaním (3.3) a (3.4) dostávame Cauchyho-Riemannove rovnice. ■

Propozícia 3.2.2 Cauchyho-Riemannove rovnice zodpovedajúce predchádzajúcemu označeniu môžeme ekvivalentne zapísať v tvare

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -j \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (3.5)$$

kde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Cauchyho-Riemannove rovnice a s nimi ekvivalentný vzťah (3.5) však nemôžu byť určujúce pre existenciu derivácie $f'(z_0)$ podľa Definície 3.1.1, pretože závisia iba na správaní sa funkcie $f(z)$ na priamkach prechádzajúcich bodom z_0 rovnobežných s reálnou a imaginárnou osou. Preto je nutné sa na problematiku pozrieť cez optiku okolia bodu, čím sa dostávame k využitiu pojmu diferencovateľnosti funkcie v bode. Sformulujeme a následne dokážeme opačnú implikáciu Vety 3.2.1.

Veta 3.2.3 Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + j v(x, y)$ má diferencovateľné funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ v bode $z_0 = (x_0, y_0)$, a nech platia v tomto bode Cauchyho-Riemannove rovnice, potom existuje $f'(z_0)$.

Dôkaz. Predpoklad diferencovateľnosti funkcií $u(x, y)$ a $v(x, y)$ v bode (x_0, y_0) môžeme vyjadriť

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \eta_x(\Delta x, \Delta y), \\ v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) &= \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \eta_y(\Delta x, \Delta y), \end{aligned}$$

kde $\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$ sú konečné čísla a platí

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\eta_x(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\eta_y(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Vyjadríme si pomocou uvedených vzťahov pre diferencovateľnosť funkcií $u(x, y)$ a $v(x, y)$ deriváciu funkcie $f'(z_0)$ v bode $z_0 = (x_0, y_0)$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + j(v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0))}{\Delta x + j \Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + j \left(\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y \right) + \eta_x(\Delta x, \Delta y) + j \eta_y(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x + j \Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} (\Delta x + j \Delta y) + j \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} (\Delta x + j \Delta y)}{\Delta x + j \Delta y} + \frac{\eta_x(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x + j \Delta y} + \frac{j \eta_y(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x + j \Delta y} \right) \\ &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + j \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \\ &\quad + \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{\eta_x(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \underbrace{\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x + j \Delta y}}_{=1} + j \frac{\eta_y(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \underbrace{\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x + j \Delta y}}_{=1} \right) \\ &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + j \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Na základe predošlého a z predpokladu platnosti Cauchyho-Riemannových rovníc vyplýva tvrdenie dokazovanej vety. ■

Tým sa dostávame k formulácii nutnej a aj postačujúcej podmienky pre existenciu derivácie komplexnej funkcie v bode.

Veta 3.2.4 — Nutná a postačujúca podmienka existencie derivácie v bode. Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ má diferencovateľné funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ v bode $z_0 = (x_0, y_0)$, potom nutnou a postačujúcou podmienkou existencie derivácie $f'(z_0)$ v bode z_0 sú Cauchyho-Riemannove rovnice.

Dôkaz. Zlúčením Viet 3.2.1 a 3.2.3 dostávame tvrdenie Vety 3.2.4. ■

Veta 3.2.4 nám dovoľuje zistiť existenciu a hodnotu derivácie komplexnej funkcie komplexnej premennej, na základe podmienok, ktoré sa vyšetrujú v reálnej analýze funkcie dvoch premenných.

Doteraz sme komplexnú funkciu $f(z)$ považovali za funkciu dvoch premenných $f(x, y)$, ktorá má komplexné hodnoty. Existencia derivácie však vyžaduje, aby táto funkcia závisela od špeciálnej kombinácie premenných x, y , a to od $x + jy$. Našťastie také funkcie sú veľmi zriedkavé medzi všetkými funkciami dvoch premenných. Čiastočne tým kompenzujeme nevýhodu, že si komplexnú funkciu nemôžeme vizualizovať grafom. Grafom komplexnej funkcie je síce dvojrozmerná plocha, avšak vo štvorrozmernom priestore $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, čo sa naozaj dosť náročne znázorňuje.

Niekedy sa podmienka diferencovateľnosti funkcií $u(x, y)$ a $v(x, y)$ dokazuje na základe silnejšieho tvrdenia spojitosti ich parciálnych derivácií $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Dôsledok 3.2.5 Funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, je holomorfná v oblasti Ω práve vtedy, keď má v tejto oblasti spojité parciálne derivácie $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ a platia na tejto oblasti Cauchyho-Riemannove rovnice.

■ **Príklad 3.4** Určme deriváciu funkcie

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2jxy.$$

Nájdeme príslušné parciálne derivácie, vyšetříme ich spojitost a overíme platnosť Cauchyho-Riemannových rovníc.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) = 2x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^2) = -2y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy) = 2y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy) = 2x. \end{aligned}$$

Vidíme, že všetky parciálne derivácie sú spojité pre všetky body komplexnej roviny a takisto tu platia Cauchyho-Riemannove rovnice, tým pádom sú splnené predpoklady existencie derivácie funkcie v celej komplexnej rovine.

1. spôsob: Pre deriváciu funkcie zrejme platí

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) + j \frac{\partial}{\partial x} (2xy) \\ &= 2x + j2y = 2(x + jy) = 2z. \end{aligned}$$

2. spôsob: Alebo si môžeme danú funkciu vyjadriť pomocou premennej z , a to zavedením substitúcie

$$\begin{aligned} z = x + jy &\Rightarrow x = z - jy \\ f(z) &= x^2 - y^2 + 2jxy = (z - jy)^2 - y^2 + 2jy(z - jy) \\ &= z^2 - 2jzy - y^2 - y^2 + 2jzy + 2y^2 = z^2. \end{aligned}$$

Odkiaľ

$$f'(z) = (z^2)' = 2z.$$

■

■ **Príklad 3.5** Zistíme, v ktorých bodoch majú funkcie deriváciu a nájdime ju

1. $f(z) = \bar{z}$,
2. $f(z) = |z|^2$,
3. $f(z) = z^3$,
4. $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

1. Overíme holomorfnosť funkcie, t. j. podľa Dôsledku 3.2.5, či má spojité parciálne derivácie prvého rádu a platia Cauchyho-Riemannove vzorce. Funkcia $f(z) = \bar{z} = x - jy$, kde $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x$ a $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = -y$, a preto platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -1. \end{aligned}$$

Vidíme, že funkcia $f(z) = \bar{z}$ holomorfná nie je v žiadnom bode komplexnej roviny.

2. Funkcia $f(z) = |z|^2 = |x + jy|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$, kde $u(x, y) = x^2 + y^2$ a $v(x, y) \equiv 0$. Zrejme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Funkcia $f(z) = |z|^2$ je holomorfná v jedinom bode, pre ktorý sú v platnosti Cauchyho-Riemannove vzťahy, a to $(x, y) = (0, 0)$. Derivácia v tomto bode má tvar

$$f'(0) = \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} + j \frac{\partial v(0, 0)}{\partial x} = 0 + j0 = 0.$$

3. Funkcia $f(z) = z^3 = (x + jy)^3 = x^3 + 3jx^2y - 3xy^2 - jy^3$ má reálnu zložku $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$

a imaginárnu $v(x, y) = 3x^2y - y^3$. Parciálne derivácie týchto zložiek sú

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

Cauchyho-Riemannove rovnice sú platné pre všetky body komplexnej roviny, parciálne derivácie sú tu spojité, a tak pre deriváciu funkcie platí

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + j 6xy = 3z^2.$$

4. Platí $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-jy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - j \frac{y}{x^2+y^2}$. Odtiaľ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x \cdot (x^2 + y^2)^{-1} \right)'_y = -x \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Z uvedeného vyplýva, že funkcia je holomorfná na celom svojom definičnom obore, t. j. $D_f = \mathbb{C} \setminus \{z_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)\}$. A pre jej deriváciu platí

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + j \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + 2jxy + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-\bar{z}^2}{(|z|^2)^2}.$$

■

Uvedieme niekoľko často sa vyskytujúcich typov príkladov.

■ **Príklad 3.6** Určme funkciu $w(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$, ktorá je holomorfná na $\mathbb{C}$, ak jej reálna zložka je

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$$

a platí $f(j) = 1$.

Hľadáme imaginárnu zložku $v(x, y)$. Podľa Cauchyho-Riemannových rovníc pre holomorfnú funkciu platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

čiže v našom prípade

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + x.$$

A teda pre funkciu $v(x, y)$ platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= 2x + y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y - x.\end{aligned}$$

Prvú z predchádzajúcich rovností integrujeme podľa premennej y a dostávame

$$v(x, y) = \int (2x + y) dy = 2xy + \frac{y^2}{2} + c(x),$$

kde $c(x)$ je z pohľadu premennej y konštanta, nie však z pohľadu premennej x . Dosiahnutý čiastkový výsledok znovu zderivujeme podľa premennej x

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2xy + \frac{y^2}{2} + c(x) \right) = 2y + c'(x)$$

a položíme do rovnosti s predchádzajúcou parciálnou deriváciou funkcie $v(x, y)$ podľa premennej x , t. j. $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y - x$

$$\begin{aligned}2y - x &= 2y + c'(x), \\ -x &= c'(x).\end{aligned}$$

Odkiaľ

$$c(x) = \int -x dx = -\frac{x^2}{2} + c,$$

kde $c_2 \in \mathbb{R}$ je konštanta.

Hľadaná funkcia má teda tvar

$$v(x, y) = 2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c$$

a celkovo

$$w(x, y) = x^2 - y^2 + xy + j \left(2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c \right)$$

Na určenie konštanty $c \in \mathbb{R}$ využijeme podmienku $f(j) = 1$, ale najskôr si funkciu $w(x, y)$ vyjadríme ako funkciu komplexnej premennej z . Využijeme na to už spomínanú substitúciu

$$z = x + jy \quad \Rightarrow \quad x = z - jy,$$

a teda platí

$$\begin{aligned}w(x, y) &= x^2 - y^2 + xy + j \left(2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c \right) \\ &= (z - jy)^2 - y^2 + (z - jy)y + j \left(2(z - jy)y + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}(z - jy)^2 + c \right) \\ &= z^2 - 2jzy - y^2 - y^2 + zy - jy^2 + 2jzy + 2y^2 - \frac{1}{2}jz^2 - zy + jy^2 + jc \\ &= z^2 - \frac{1}{2}jz^2 + jc = \left(1 - \frac{j}{2} \right) z^2 + jc = f(z).\end{aligned}$$

Dosadíme podmienku $f(j) = 1$

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{j}{2}\right) \cdot j^2 + jc &= 1, \\ -1 + \frac{j}{2} + jc &= 1, \\ c &= \frac{1}{2} - 2j.\end{aligned}$$

Hľadaná funkcia je

$$f(z) = \left(1 - \frac{j}{2}\right) z^2 + j \left(\frac{1}{2} - 2j\right)$$

alebo v inom zápise

$$\begin{aligned}w(x, y) &= x^2 - y^2 + xy + j \left(2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - 2j\right) \\ &= x^2 - y^2 + xy + 2 + j \left(2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

■

■ **Príklad 3.7** Určme funkciu $w(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$, ktorá je holomorfná na $\mathbb{C}$, ak jej imaginárna zložka je

$$v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + 1.$$

Parciálne zderivujeme

$$\begin{aligned}I. \quad & \frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y - 4y^3 = -\frac{\partial u}{\partial y}, \\ II. \quad & \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2 = \frac{\partial u}{\partial x}.\end{aligned}$$

Z II. dostávame

$$u(x, y) = \int (4x^3 - 12xy^2) dx = x^4 - 6x^2y^2 + c(y).$$

Zderivujeme $u(x, y)$ podľa y a porovnáme s I.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -12x^2y + c'(y) = -12x^2y + 4y^3,$$

odkiaľ určíme hľadanú neznámu funkciu

$$c(y) = \int 4y^3 dy = y^4 + c.$$

Hľadaná funkcia má tvar

$$w(x, y) = u(x, y) + jv(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + c + j(4x^3y - 4xy^3 + 1).$$

■

■ **Príklad 3.8** Určme funkciu $w(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$, ktorá je holomorfná na $\mathbb{C}$, ak jej imaginárna zložka je

$$v(x, y) = e^{2x} \sin 2y + x^2 - y^2.$$

Nájdeme príslušné parciálne derivácie

$$I. : \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} \sin 2y + 2x = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$II. : \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x} \cos 2y - 2y = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Z I. dostávame

$$u(x, y) = \int (-2e^{2x} \sin 2y - 2x) dy = e^{2x} \cos 2y - 2xy + c(x).$$

Derivovaním $u(x, y)$ podľa x a porovnaním s II. dostávame

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x} \cos 2y - 2y + c'(x) = 2e^{2x} \cos 2y - 2y,$$

odkiaľ

$$c(x) = \int 0 dx = 0 + c$$

a hľadaná funkcia má teda tvar

$$w(x, y) = u(x, y) + jv(x, y) = e^{2x} \cos 2y - 2xy + c + j(e^{2x} \sin 2y + x^2 - y^2).$$

■

3.2.1 Cauchyho-Riemannove rovnice v polárnych súradniciach

Máme danú funkciu komplexnej premennej

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

a zavedieme polárne súradnice

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi,$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ a $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Komplexná funkcia komplexnej $f(z)$ má tvar

$$f(z) = u(\rho, \varphi) + jv(\rho, \varphi).$$

Vypočítame jednotlivé parciálne derivácie pomocou derivácie zloženej funkcie viacerých premenných

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} (-\rho \sin \varphi) + \frac{\partial u}{\partial y} (\rho \cos \varphi),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial x} (-\rho \sin \varphi) + \frac{\partial v}{\partial y} (\rho \cos \varphi).$$

Odkiaľ dostávame Cauchyho-Riemannove rovnice v polárnych súradniciach

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

a pre deriváciu komplexnej funkcie komplexnej premennej v polárnych súradniciach platí

$$f'(z) = e^{-j\varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + j \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) = \frac{e^{-j\varphi}}{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - j \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)$$

■ **Príklad 3.9** Zistite, či je funkcia holomorfná

$$f(z) = \rho^2 \cos 2\varphi + j \rho^2 \sin 2\varphi.$$

Nájdeme parciálne derivácie

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 2\rho \cos 2\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -2\rho^2 \sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = 2\rho \sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 2\rho^2 \cos 2\varphi.$$

Vidíme, že platia Cauchyho-Riemannove rovnosti v polárnych súradniciach, a teda funkcia je holomorfná na celom svojom definičnom obore. ■

■ **Príklad 3.10** Nájdime deriváciu funkcie

$$f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Ak si prepíšeme z do goniometrického tvaru $z = \rho e^{j\varphi}$, môžeme funkciu zapísať

$$f(z) = \frac{1}{\rho^2 e^{j2\varphi}} = \frac{1}{\rho^2} (\cos(-2\varphi) + j \sin(-2\varphi)) = \frac{1}{\rho^2} (\cos 2\varphi - j \sin 2\varphi)$$

čiže, pre $u(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^2} \cos 2\varphi$ a $v(\rho, \varphi) = -\frac{1}{\rho^2} \sin 2\varphi$ dostávame

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{2}{\rho^3} \cos 2\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{2}{\rho^2} \sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{2}{\rho^3} \sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{2}{\rho^2} \cos 2\varphi.$$

Vidíme, že platia Cauchyho-Riemannove rovnice v polárnych súradniciach

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

A pre deriváciu funkcie platí

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-j\varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + j \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) = \frac{e^{-j\varphi}}{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - j \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = e^{-j\varphi} \left(-\frac{2}{\rho^3} \cos 2\varphi + j \frac{2}{\rho^3} \sin 2\varphi \right) \\ &= e^{-j\varphi} \left(-\frac{2}{\rho^3} \cos(-2\varphi) - j \frac{2}{\rho^3} \sin(-2\varphi) \right) = -\frac{2}{\rho^3} e^{-j\varphi} e^{-j2\varphi} = \frac{2}{\rho^3} e^{-j3\varphi} = -\frac{2}{z^3}. \end{aligned}$$

■

3.3 Harmonické funkcie a komplexný potenciál

Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ je holomorfná na oblasti $\Omega \subset D_f$. Potom na oblasti Ω existujú parciálne derivácie $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial y}$. Predpokladajme navyše, že funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ majú na oblasti Ω spojité parciálne derivácie druhého rádu. V takom prípade platia rovnosti (zámennosť druhých parciálnych rovníc)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \quad (3.6)$$

Ak má funkcia $f(z)$ deriváciu, tak potom podľa Cauchyho-Riemannových rovníc (3.2) postupne dostávame

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Porovnaním predchádzajúcich rovností vzhľadom na (3.6) platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Vidíme, že obe funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ vyhovujú rovnakému typu rovnice

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \nabla^2 \Phi = 0.$$

Funkcie vyhovujúce tejto parciálnej rovnici, tzv. Laplaceovej rovnici, tvoria istú triedu funkcií, ktorú definujeme nižšie.

Definícia 3.3.1 — Harmonická funkcia. Ak funkcia dvoch premenných $F(x, y) : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ má spojité parciálne derivácie 2. rádu, ktoré spĺňajú Laplaceovu rovnicu na Ω , t. j. platí

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = \nabla^2 F = 0,$$

nazýva sa $F(x, y)$ *harmonickou funkciou* v oblasti Ω .

Veta 3.3.1 Nech komplexná funkcia $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$, $f : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná v oblasti $\Omega \subset D_f$.

Nech reálne funkcie $u(x, y)$, $u : \mathbb{R}^2 \supset D_u \rightarrow \mathbb{R}$, a $v(x, y)$, $v : \mathbb{R}^2 \supset D_v \rightarrow \mathbb{R}$, majú spojité parciálne derivácie 2. rádu.

Potom sú funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ harmonickými funkciami v oblasti Ω .

Dôkaz. Vyplýva priamo z predošlých úvah. ■

Definícia 3.3.2 — Harmonicky združené funkcie. Harmonické funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ sa nazývajú *harmonicky združené funkcie* v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$, ak vyhovujú Cauchyho-Riemannovým rovniciam v oblasti Ω .

Veta 3.3.2 Funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ je diferencovateľná v oblasti $\Omega \subset D_f$ práve vtedy, keď funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ sú harmonicky združené funkcie v oblasti Ω .

Dôkaz. 1. Nech je $f(z)$ je diferencovateľná v oblasti Ω , potom funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ vyhovujú v Ω Cauchyho-Riemannovým rovniciam. Potom podľa (3.1.3) má funkcia $f(z)$ spojité derivácie ľubovoľného rádu, preto aj parciálne derivácie funkcií $u(x, y)$ a $v(x, y)$ ľubovoľného rádu sú spojité. Čiže funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ sú harmonicky združené.

2. Nech funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ sú harmonicky združené v oblasti Ω , potom v Ω vyhovujú Cauchyho-Riemannovým rovniciam. Na základe toho majú funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ spojité parciálne derivácie druhého rádu v Ω , a teda sú diferencovateľné. Podľa Vety 3.2.4 je funkcia $f(z)$ diferencovateľná v oblasti Ω . ■

■ **Príklad 3.11** Ukážme, že funkcia $u(x, y) = xy^3 - x^3y$ je harmonická funkcia a nájdime harmonicky združenú funkciu $v(x, y)$.

Prvé parciálne derivácie funkcie $u(x, y)$ sú

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= y^3 - 3x^2y, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= 3xy^2 - x^3.\end{aligned}$$

Overíme harmonickosť funkcie u

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -6xy + 6xy = 0.$$

Pomocou prvej parciálnej derivácie funkcie $u(x, y)$ podľa premennej x skonštruujeme funkciu $v(x, y)$

$$v(x, y) = \int (y^3 - 3x^2y) dy = \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}x^2y^2 + c(x).$$

Jej derivovaním podľa premennej x a následne použitím druhej Cauchyho-Riemannovej rovnice $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, dostávame rovnosť

$$-3xy^2 + x^3 = -3xy^2 + c'(x).$$

Odkiaľ zrejme

$$c(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$$

čiže harmonicky združená funkcia k funkcii $u(x, y)$ je

$$v(x, y) = \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + c.$$

■

Definícia 3.3.3 — Komplexný potenciál. Ak funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ sú harmonicky združené funkcie v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Potom funkcia

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y),$$

kde $u(x, y)$ je *potenciálová funkcia (potenciál)* a $v(x, y)$ je *silová funkcia* vektorového poľa $\mathbf{g}(x, y)$, sa nazýva *komplexný potenciál vektorového poľa $\mathbf{g}(x, y)$* .

R Pre potenciálnu funkciu $u(x, y)$ vektorového poľa $\mathbf{g}(x, y)$ platí

$$\text{grad } u(x, y) = \mathbf{g}(x, y),$$

kde

$$\text{grad } u(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \mathbf{j}$$

Definícia 3.3.4 Rovnica $u(x, y) = c$, kde c je konštanta, reprezentuje *ekvipotenciály* vektorového poľa $\mathbf{g}(x, y)$.

Rovnica $v(x, y) = k$, kde k je konštanta, reprezentuje *siločiary* vektorového poľa $\mathbf{g}(x, y)$.

R Ekvipotenciály a siločiary sú navzájom ortogonálne.

■ **Príklad 3.12** Určme ekvipotenciály a siločiary vektorového poľa, ktorého komplexným potenciálom je funkcia

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

Komplexný potenciál má tvar

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + j \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

a teda potenciálová funkcia je tvaru

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

a silová funkcia je

$$v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Pre ekvipotenciály musí preto platiť

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R},$$

$$x = c(x^2 + y^2),$$

$$\frac{x}{c} = x^2 + y^2,$$

$$x^2 - \frac{x}{c} + y^2 = 0,$$

$$\left(x^2 - \frac{x}{c} + \frac{1}{4c^2}\right) + y^2 = \frac{1}{4c^2},$$

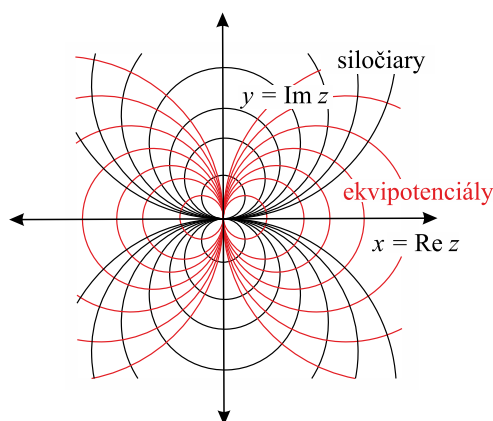
$$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2}.$$

Vidíme, že ekvipotenciály majú tvar kružníc so stredom v bodoch $S = (\frac{1}{2c}, 0)$ a polomerom $\rho = \frac{1}{2c}$ (kružnice majú vždy stred na osi o_y).

Siločiaru budú zrejme dané vzťahom

$$\begin{aligned}\frac{-y}{x^2+y^2} &= k, \quad \text{kde } k \in \mathbb{R}, \\ -y &= k(x^2+y^2), \\ -\frac{y}{k} &= x^2+y^2, \\ x^2+\frac{y}{k}+y^2 &= 0, \\ x^2+y^2+\frac{y}{k}+\left(\frac{1}{2k}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2k}\right)^2, \\ x^2+\left(y+\frac{1}{2k}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2k}\right)^2,\end{aligned}$$

čo sú opäť kružnice, tentoraz so stredmi v bodoch $S = (0, \frac{1}{2k})$ a polomerom $\rho = \frac{1}{2k}$, teda rozmiestnené pozdĺž osi o_y . ■



Obr. 3.3.1: Ekvipotenciály a silochiary vektorového poľa z Príkladu 3.12

■ **Príklad 3.13** Určme komplexný potenciál vektorového poľa

$$\mathbf{g}(x, y) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Platí

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

a

$$\text{grad } u(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \mathbf{j} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j},$$

odkiaľ pre neznámu funkciu $u(x, y)$ dostávame

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2 \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int 2dx = 2x + c_1(y),$$

ďalej platí

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = c'_1(y) = 1,$$

čiže

$$c_1(y) = \int 2dy = y + c_1,$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}$. Reálna zložka komplexného potenciálu je

$$u(x,y) = 2x + y + c_1.$$

Ďalej využijúc platnosti Cauchyho-Riemannových rovností

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

dostávame

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 2 \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = \int 2dy = 2y + c_2(y)$$

a

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = c'_2(x) = -1,$$

preto

$$c_2(x) = \int (-1)dy = -x + c_2,$$

kde $c_2 \in \mathbb{R}$, čiže imaginárna zložka komplexného potenciálu má tvar

$$v(x,y) = 2y - x + c_2.$$

Celkovo pre komplexný potenciál vektorového poľa $\mathbf{g}(x,y) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ platí

$$f(z) = 2x + y + c_1 + \mathbf{j} \cdot (2y - x + c_2).$$

Ekvipotenciály sú priamky

$$\begin{aligned} 2x + y + c_1 &= c, \\ 2x + y + \beta_1 &= 0 \end{aligned}$$

a siločiarly sú priamky

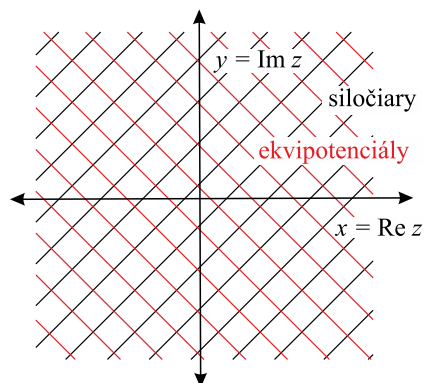
$$\begin{aligned} 2x - y + c_2 &= k, \\ 2x - y + \beta_2 &= 0, \end{aligned}$$

kde $\beta_1 = c_1 - c \in \mathbb{R}$ a $\beta_2 = c_2 - k \in \mathbb{R}$.

Tento potenciál si môžeme prepísať pomocou prepisu $z = x + \mathbf{j}y \Rightarrow x = z - \mathbf{j}y$ na tvar

$$\begin{aligned} f(z) &= 2x + y + c_1 + \mathbf{j}(2y - x + c_2) = 2z - 2\mathbf{j}y + y + c_1 + 2\mathbf{j}y - \mathbf{j}z - y + \mathbf{j}c_2 \\ &= 2z - \mathbf{j}z + \underbrace{c_1 + \mathbf{j}c_2}_{C \in \mathbb{C}} = (2 - \mathbf{j})z + C. \end{aligned}$$

■



Obr. 3.3.2: Ekvipotenciály a siločiary vektorového poľa z Príkladu 3.13

■ **Príklad 3.14** Určme komplexný potenciál vektorového poľa

$$\mathbf{g}(x, y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}.$$

$$\text{grad } u(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \mathbf{j} = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}.$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int 2x dx = x^2 + c_1(y),$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = c'_1(y) = -2y,$$

$$c_1(y) = \int (-2y) dy = -y^2 + c_1,$$

a teda

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + c_1.$$

Z Cauchyho-Riemannových rovností dostávame

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2x \quad \Rightarrow \quad v(x, y) = \int 2x dy = 2xy + c_2(y),$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2y + c'_2(x) = 2y,$$

$$c_2(x) = \int 0 dx = c_2,$$

preto

$$v(x, y) = 2xy + c_2.$$

Odkiaľ

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 + c_1 + j \cdot (2xy + c_2) \\ &= x^2 + 2xy - y^2 + \underbrace{c_1 + jc_2}_{C \in \mathbb{C}} \\ &= z^2 + C. \end{aligned}$$

■

3.4 Cvičenia

Cvičenie 3.1 Zistite, v ktorých bodoch $z \in \mathbb{C}$ má funkcia deriváciu, ak:

a) $f(z) = \frac{1}{z}$, $\left[\frac{z}{1} = (z) f' \{0\} \setminus \mathbb{C} \ni z \right]$

b) $f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z}{z}, & \text{pre } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{pre } z = 0, \end{cases}$ $[\mathbb{C} \ni z \text{ a } \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z]$

Cvičenie 3.2 Použitím L'Hospitalovho pravidla vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim_{z \rightarrow -j} \frac{z^2 + 1}{z^3 + jz^2 - z - j}$, $[f]$

b) $\lim_{z \rightarrow 1+j} \left(\frac{z}{z^2 - 2z + 2} - \frac{1}{z^2 - 2jz - 2} \right)$. $\left[\frac{f}{1} - \frac{1}{1} \right]$

Cvičenie 3.3 Určte holomorfnú funkciu $w(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$, ak:

a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\left[f + \frac{z}{1} - z(f - g) + \frac{z}{z} = (z)f = (\kappa'x)u \right]$

b) $v(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $\left[\frac{z}{1+1} = (z)f = (\kappa'x)u \right]$

c) $v(x, y) = x^2 - y^2 + 3 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}$, $\left[\frac{z}{1} + \frac{z}{1} + f + \frac{z}{z} = (z)f = (\kappa'x)u \right]$

d) $u(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y$, ak $w(0) = 0$, $[1 = \operatorname{Re} f(z)(f - 1) = (z)f = (\kappa'x)u]$

e) $u(x, y) = 3x^2y - y^3 + 2(x^2 + y^2)$, $[f + \frac{z}{z} + \frac{z}{z} = (z)f = (\kappa'x)u]$

Cvičenie 3.4 Ukážte, že funkcia $u(x, y)$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu $v(x, y)$ a holomorfnú funkciu $f(z)$, že $u = \operatorname{Re} f$, ak:

a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, $\left[f + \frac{z}{z} - \frac{z}{z} = (z)f + \kappa x \frac{z}{z} + \frac{z}{z - z} = (\kappa'x)u \right]$

b) $u(x, y) = 3x^2y - y^3$, $[f + \frac{z}{z} = (z)f + \kappa x - \frac{\kappa x}{z} = (\kappa'x)u]$

c) $u(x, y) = e^x \cos y + 1$, $[f + \frac{z}{z} + f + 1 = (z)f + \kappa + 1 + \kappa \operatorname{Re} x = (\kappa'x)u]$

d) $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$, $[f + \frac{z}{z} + \frac{z}{z} = (z)f + \kappa x + \kappa x - \kappa x = (\kappa'x)u]$

4. Mocninový rad holomorfnej funkcie

4.1 Komplexný mocninový rad

Celá problematika sa odvíja od pojmu mocninového radu, preto zavedieme jeho presnú definíciu a rozoberieme si jeho vlastnosti.

Definícia 4.1.1 — Komplexný mocninový rad. Rad tvaru

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (4.1)$$

nazývame *komplexný mocninový rad so stredom* z_0 , kde členy postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($a_n \in \mathbb{C}$) nazývame koeficienty mocninového radu.

R Výrazy

$$S_m(z) = \sum_{n=0}^m a_n(z - z_0)^n$$

nazývame čiastočné súčty mocninového radu (4.1).

Problematika konverencie číselných radov je jasná, buď konvergujú alebo divergujú. V prípade súčtu funkcií (čo je aj prípad mocninového radu) rozlišujeme prípad konverencie na dva typy.

Definícia 4.1.2 — Bodová konvergencia mocninového radu. Hovoríme, že mocninový rad (4.1) *konverguje bodovo* na množine Ω práve vtedy, keď pre každé $z \in \Omega$ existuje konečná limita $S(z)$ čiastočných súčtov

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(z) = S(z).$$

Ak neexistuje konečná limita $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(z)$, hovoríme, že mocninový rad diverguje v bode z .

Definícia 4.1.3 — Obor konvergenzie mocninového radu. *Komplexnú funkciu $S(z)$ nazývame súčet mocninového radu (4.1) a túto skutočnosť budeme značiť*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = S(z).$$

Definičný obor súčtu $S(z)$ mocninového radu (4.1), t. j. body $z \in \mathbb{C}$ v ktorých rad konverguje, nazývame *obor konvergenzie mocninového radu*.

Je zrejmé, že každý mocninový rad (4.1) triviálne konverguje v bode $z = z_0$, kedy je jeho súčtom $S(z_0) = a_0$. V nasledujúcej definícii si popíšeme značne „kvalitnejší“ spôsob konvergenzie, ktorý zachová vlastnosti sčítaných funkcií i na súčte $S(z)$.

Definícia 4.1.4 — Rovnomerná konvergenca mocninového radu. Hovoríme, že mocninový rad (4.1) *konverguje rovnomerne* na množine Ω práve vtedy, keď existuje funkcia $S(z)$, pre ktorú platí

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Omega} |S_m(z) - S(z)| = 0,$$

kde $S_m(z)$ sú čiastočné súčty mocninového radu (4.1).

Ukážeme si rozdiel medzi bodovou a rovnomernou konvergenciou mocninového radu. Predpokladajme, že rad (4.1) konverguje bodovo na množine Ω . To znamená, že pre istý zvolený bod $z \in \Omega$ a k číslu $\varepsilon > 0$ nájdeme index m_0 taký, že všetky čiastočné súčty $S_m(z)$ s vyšším indexom sa líšia od funkcie súčtu $S(z)$ nanajvýš o ε , t. j.

$$|S_m(z) - S(z)| < \varepsilon, \quad \text{pre } m \geq m_0.$$

Ak by sme ponechali tú istú odchýlku $\varepsilon > 0$, avšak zmeníme predmetný bod na $z^* \in \Omega$, potom opäť nájdeme index m_0^* , že platí

$$|S_m(z^*) - S(z^*)| < \varepsilon, \quad \text{pre } m \geq m_0^*.$$

Vo všeobecnosti môže byť index m_0^* omnoho vyšší ako index m_0 . Teda ku tej istej zvolenej odchýlke $\varepsilon > 0$ pre rôzne body množiny Ω musíme voliť všeobecne vyšší a vyšší index, aby sme sa s čiastočnými súčtami priblížili k funkcii $S(z)$ pri zadanej odchýlke.

Naproti tomu pri rovnomernej konvergencii máme zaručené, že pre dané $\varepsilon > 0$ existuje index m_0 s vlastnosťou

$$\sup_{z \in \Omega} |S_m(z) - S(z)| < \varepsilon, \quad \text{pre } m \geq m_0,$$

kde sa čiastočný súčet $S_{m_0}(z)$ líši od funkcie $S(z)$ o stanovené $\varepsilon > 0$ vo všetkých bodoch $z \in \Omega$ súčasne. Preto rovnomerná konvergenca je pojem silnejší ako bodová konvergenca, čiže ak konverguje rad rovnomerne, konverguje aj bodovo, čo však naopak neplatí, čo ilustrujeme nasledujúcim príkladom.

■ **Príklad 4.1** Vyšetříme konvergenciu mocninového radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Daný geometrický rad má kvocient $q = z$. Pre $|z| < 1$ je tento rad konvergentný a pre jeho súčet platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = S(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Teda konverguje bodovo na množine $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ku funkcii $S(z) = \frac{1}{1-z}$. Avšak nekonverguje rovnomerne, nakoľko čiastočný súčet tohto radu je

$$\sum_{n=0}^m z^n = S_m(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{m+1}}{1-z} = \frac{1-z^{m+1}}{1-z},$$

odkiaľ

$$\sup_{z \in \Omega} |S_m(z) - S(z)| = \sup_{z \in \Omega} \left| \frac{1-z^{m+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| = \sup_{z \in \Omega} \left| \frac{z^{m+1}}{1-z} \right| = \sup_{z \in \Omega} \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|} = \infty.$$

Vidíme, že tento rozdiel nie je možné nijakým spôsobom ohraničiť. Ak by sme však namiesto celej množiny Ω uvažovali iba jej podmnožinu $\Omega_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ pre $r \in (0, 1)$, dostávame

$$\sup_{z \in \Omega_r} |S_m(z) - S(z)| = \sup_{z \in \Omega_r} \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|} = \frac{r^{m+1}}{1-r},$$

nakoľko $0 < r < 1$, docielime zvyšujúcim sa $m+1$ pre vopred dané $\varepsilon > 0$ ohraničenie

$$\frac{r^{m+1}}{1-r} < \varepsilon.$$

Z uvedeného vidíme, že komplexný rad $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konverguje bodovo na celej množine $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, rovnomerne konverguje na každej množine $\Omega_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ pre $r \in (0, 1)$, ale nekonverguje rovnomerne na celej množine Ω . ■

Veta 4.1.1 — Nutná podmienka konvergence mocninového radu. Nutnou podmienkou konvergence mocninového radu (4.1) je, aby jeho členy konvergovali k nule, t. j.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (z - z_0) = 0.$$

Dôkaz. Nech rad (4.1) konverguje v bode $z \in \mathbb{C}$, potom pre rozdiel jeho čiastkových súčtov platí práve

$$S_n(z) - S_{n-1}(z) = a_n(z - z_0).$$

Odkiaľ dostávame

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z - z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}(z) = S(z) - S(z) = 0.$$

■

Veta 4.1.2 — Postačujúca podmienka konvergence mocninového radu. Nutnou a postačujúcou podmienkou konvergence komplexného mocninového radu (4.1) v bode $z \in \mathbb{C}$ je, aby konvergoval reálny rad $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n$.

Dôkaz. Vyplýva priamo z definície konvergentnosti mocninového radu. ■

R V takomto prípade hovoríme, že mocninový rad (4.1) *konverguje absolútne v bode* $z \in \mathbb{C}$. Hovoríme, že *konverguje absolútne na oblasti* Ω práve vtedy, keď konverguje absolútne v každom bode $z \in \Omega$.

Kritérium pre rovnomernú konvergiu nazývame Weierstrassovo kritérium. Formulujeme ho vo všeobecnosti pre funkcionálny rad.

Veta 4.1.3 — Weierstrassovo kritérium. Nech pre každé $z \in \Omega$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \sup_{z \in \Omega} |f_n(z)|.$$

Ak konverguje číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, potom funkcionálny rad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ konverguje rovnomerne na množine Ω .

Dôkaz. Priamo z podmienky $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ vyplýva, že funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konverguje absolútne na množine Ω .

Dokážeme rovnomernú konvergenciu na Ω . Súčet funkcionálneho radu označíme $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ a jeho čiastočný súčet $S_m(z) = \sum_{n=0}^m f_n(z)$. Zrejme platí

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \Omega} |S(z) - S_m(z)| &= \sup_{z \in \Omega} \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) - \sum_{n=0}^m f_n(z) \right| = \sup_{z \in \Omega} \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z) \right| \\ &\leq \sup_{z \in \Omega} \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Z konverencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ vyplýva, že voľbou vysokej mocniny $m+1$ môžeme súčet $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ vytvoriť ľubovoľne malým (blízkym nule). Teda pre každé $\varepsilon > 0$ existuje m_0 také, že platí

$$\sup_{z \in \Omega} |S_m(z) - S(z)| < \varepsilon, \quad \text{pre } m \geq m_0,$$

čím je rovnomerná konvergencia na Ω dokázaná. ■

Pre ďalšie úvahy budeme potrebovať zaviesť pojem *limes superior* postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálnych čísel, ktorý definujeme a budeme označovať nasledujúco

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_k \mid k \geq n\}.$$

Číslo $\sup \{a_k \mid k \geq n\}$ tvorí nerastúcu postupnosť v indexe n , preto $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ existuje vždy (na rozdiel od $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$). Ak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$. Limes superior je najväčší hromadný bod postupnosti a_n . Objasníme si to na jednoduchom príklade. Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť jednotiek a núl. Ak obsahuje iba konečný počet núl, zrejme platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Ak obsahuje iba konečný počet jednotiek, analogicky platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Avšak, ak obsahuje nekonečne veľa núl aj jednotiek, potom limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ neexistuje, ale $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_k \mid k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

Propozícia 4.1.4 Nech $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Potom platí, že:

1. pre každé $\varepsilon > 0$ je splnená nerovnosť $a_n \geq L - \varepsilon$ pre nekonečne veľa členov postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$,
2. pre každé $\varepsilon > 0$ je splnená nerovnosť $a_n \leq L + \varepsilon$ pre všetky členy postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ od istého n_0 .

Propozícia 4.1.5 Nech $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Potom platí, že:

1. pre každé $\lambda < \infty$ je splnená nerovnosť $a_n \geq \lambda$ pre nekonečne veľa členov postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$,
2. pre každé $\varepsilon > 0$ je splnená nerovnosť $a_n \leq \infty + \varepsilon = \infty$ pre všetky členy postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ od istého n_0 .

Veta 4.1.6 — Polomer konverencie komplexného mocninového radu I. Nech pre mocninový rad (4.1) a nech číslo $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ je dané

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Potom číslo ρ nazveme polomerom konverencie mocninového radu (4.1) a platí:

1. ak $\rho = 0$, mocninový rad (4.1) konverguje iba v bode $z = z_0$,
2. ak $\rho = \infty$, mocninový rad (4.1) konverguje absolútne pre všetky $z \in \mathbb{C}$,
3. ak $0 < \rho < \infty$, mocninový rad (4.1):
konverguje absolútne na $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \rho\}$,
konverguje rovnomerne na $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r, 0 < r < \rho\}$
a diverguje na $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > \rho\}$.

Dôkaz. Použijeme konvenciu $1/0 = \infty$ a $1/\infty = 0$.

1. Ak $\rho = 0$, je

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty.$$

Nech $z \neq z_0$, t. j. $|z - z_0| > 0$. Použijeme vlastnosť Propozície 4.1.5 1. pre voľbu $\lambda = \frac{1}{|z - z_0|}$ dostávame pre nekonečne veľa indexov n

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{|z - z_0|}.$$

Čo je ekvivalentné s

$$|a_n| |z - z_0|^n \geq 1$$

pre nekonečne veľa indexov n . Vidíme, že nie je splnená nutná podmienka konverencie mocninového radu 4.1.1, a preto rad diverguje.

2. ak $\rho = 0$, je

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Nakoľko každý mocninový rad konverguje vo svojom strede, ukážeme konvergenciu pre $z \neq z_0$. Podobne ako v predošlom $|z - z_0| > 0$ a vlastnosť Propozície 4.1.4 2. nám dáva

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2|z - z_0|}$$

od istého indexu n_0 . A teda, pre $n \geq n_0$, platí

$$|a_n| |z - z_0|^n \leq \frac{1}{2^n}.$$

Porovnávacím kritériom s majorantným konvergentným geometrickým radom $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ dostaneme konvergenciu mocninového radu (4.1) na zvyšku komplexnej roviny.

3. Ak $0 < \rho < \infty$,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Nech z leží vo vnútri kruhu konvergenzie $|z - z_0| < \rho$. Zvolíme $R > 0$, pre ktoré platí $|z - z_0| < R < \rho$. Podľa Propozície 4.1.4 2. od istého indexu platí

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R} \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| \leq \frac{1}{R^n},$$

odkiaľ po prenasobení $|z - z_0|^n$ pre $n \geq n_0$

$$|a_n| |z - z_0|^n \leq \frac{|z - z_0|^n}{R^n} = \left(\frac{|z - z_0|}{R} \right)^n.$$

Z predpokladu $|z - z_0| < R < \rho$ vidíme, že

$$q = \frac{|z - z_0|}{R} < 1.$$

Odkiaľ opäť použitím porovnávacieho kritéria s majorantným konvergentným geometrickým radom $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{R} \right)^n$ dostaneme absolútnu konvergenciu mocninového radu (4.1) vo vnútri konvergenčného kruhu $|z - z_0| < \rho$. Teraz využijeme Weierstrassovo kritérium k dokázaniu rovnomernej konvergenzie radu na množine $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ pre každé $0 < r < \rho$. Podobne ako vyššie

$$|z - z_0| < r < R < \rho.$$

Pre takto zvolené opäť platí

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R} \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| \leq \frac{1}{R^n},$$

preto bude zrejmé platiť nasledujúci odhad

$$\sup_{|z - z_0| < r} |a_n| |z - z_0|^n \leq \sup_{|z - z_0| < r} \frac{|z - z_0|^n}{R^n} = \frac{r^n}{R^n} = \left(\frac{r}{R} \right)^n.$$

Takisto predtým, nám voľba R zaistí, že pre

$$\frac{r}{R} < 1$$

je rad $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n$ konvergentný, a teda podľa Weierstrassovho kritéria mocninový rad (4.1) rovnomerne konverguje na množine $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ pre každé $0 < r < \rho$.

Nakoniec ukážeme, že pre $|z - z_0| > \rho$ rad diverguje. Z Propozície 4.1.4 1. máme, že

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{|z - z_0|}$$

platí pre nekonečne veľa indexov n , odkiaľ po umocnení dostávame

$$|a_n| |z - z_0|^n \geq 1,$$

a preto nie je splnená nutná podmienka konvergenzie mocninového radu 4.1.1, a rad diverguje. ■

R Obor konvergence komplexného mocninového radu (4.1) pozostáva z vnútra kruhu so stredom v bode z_0 (ten je zároveň stred mocninového radu (4.1)) a polomerom ρ , prípadne z niektorých bodov kružnice $|z - z_0| = \rho$. Túto kružnicu nazývame konvergenčná kružnica a kruh $|z - z_0| \leq \rho$ nazývame konvergenčný kruh.

R Rovnica $|z - z_0| = \rho$ reprezentuje rovnicu kružnice so stredom v bode z_0 a polomerom ρ . Nerovnica $|z - z_0| \leq \rho$ predstavuje *kruh konvergence* so stredom v bode z_0 a polomerom ρ , nerovnica $|z - z_0| < \rho$ jej *vnútro* a nerovnica $|z - z_0| > \rho$ jej *vonkajšok*.

R Polomer konvergence $0 < \rho < \infty$ radu (4.1) vypočítame pomocou vzťahu

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

alebo, ak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, potom platí tiež

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}.$$

R Ak $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty$, potom kladieme $\rho = 0$.

Ak $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 0$, potom kladieme $\rho = \infty$.

■ **Príklad 4.2** Určme polomer a obor konvergence komplexného mocninového radu:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+j)^n}{n^2},$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z-2+j)^n.$

1. Stredom daného mocninového radu je bod $z_0 = -1 - j$ a n -tý koeficient je $a_n = \frac{1}{n^2}$. Určíme polomer konvergence pomocou vzťahu

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}}} = 1.$$

Oborom konvergence mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+j)^n}{n^2}$ teda je vnútro kružnice $|z+1+j| < 1$.

Vyšetríme ešte konvergiu daného radu na konvergenčnej kružnici $|z+1+j| = 1$, t. j.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z+1+j|^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Vidíme, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentný harmonický rad. A preto oborom konvergence komplexného

radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+j)^n}{n^2}$ je kruh $|z+1+j| \leq 1$.

2. Daný mocninový rad má stred v bode $z_0 = 2 - j$ a n -tý koeficient $a_n = n^n$, preto platí

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n^n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

To znamená, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z - 2 + j)^n$ konverguje len v bode $z_0 = 2 - j$. ■

Podobne ako pri číselných radoch sme mali viacero kritérií na zisťovanie konvergenzie, resp. divergencie radov, tak aj pri komplexných mocninových radoch si teraz ukážeme alternatívu k predošlému vzťahu pre určovanie polomeru oboru konvergenzie.

Veta 4.1.7 — Polomer konvergenzie komplexného mocninového radu II. Nech pre mocninový rad (4.1) a nech číslo $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ je dané

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Potom číslo ρ nazveme polomerom konvergenzie mocninového radu (4.1) a platí:

1. ak $\rho = 0$, mocninový rad (4.1) konverguje iba v bode $z = z_0$,
2. ak $\rho = \infty$, mocninový rad (4.1) konverguje absolútne pre všetky $z \in \mathbb{C}$,
3. ak $0 < \rho < \infty$, mocninový rad (4.1):
konverguje absolútne na $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\}$,
konverguje rovnomerne na $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r, 0 < r < \rho\}$
a diverguje na $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > \rho\}$.

Dôkaz. Dôkaz vykonáme tak, že ukážeme platnosť rovnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

a odkážeme na Dôkaz predošlej Vety (4.1.6).

1. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje index N taký, že pre všetky $n \geq N$ platí

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a_{n+1}| < \varepsilon |a_n|.$$

Opätovným použitím tejto nerovnosti pre $n > N$ dostávame

$$|a_n| < \varepsilon |a_{n-1}| < \varepsilon^2 |a_{n-2}| < \dots < \varepsilon^{n-N} |a_N|,$$

odtiaľ

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon^{\frac{n-N}{n}} |a_N|^{\frac{1}{n}}.$$

Použitím limes superior pre $n \rightarrow \infty$ má predošlá nerovnosť tvar

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varepsilon^{\frac{n-N}{n}} |a_N|^{\frac{1}{n}} = \varepsilon,$$

čo v dôsledku ľubovoľnosti voľby $\varepsilon > 0$ implikuje

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

čím sme dokázali platnosť prvej časti tvrdenia dokazovanej vety.

2. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, potom ku každému dostatočne veľkému $K > 0$ existuje index N taký, že pre všetky $n \geq N$ platí

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > K \quad \Leftrightarrow \quad |a_{n+1}| > K |a_n|.$$

Analogicky postupu v predošlom bode dostávame pre $n > N$

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} > K^{\frac{n-N}{n}} |a_N|^{\frac{1}{n}}.$$

Použitím limes superior pre $n \rightarrow \infty$ zrejme platí

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq K.$$

Pretože K bolo ľubovoľne veľké číslo, tak musí platiť

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

Čo je druhú časť tvrdenia dokazovanej vety.

3. Nech $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \infty$. Označme si $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Z definície limity vyplýva, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje index N , že pre všetky $n \geq N$ platí

$$\left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - L \right| < \varepsilon.$$

Nech ε spĺňa $0 < \varepsilon < L$, potom môžeme poslednú nerovnosť prepísať v tvare

$$L - \varepsilon < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L + \varepsilon.$$

Uvažujme teraz tieto nerovnosti pre $n = N, N+1, \dots, m$. Všetky spolu vynásobíme (voľba $0 < \varepsilon < L$ nám zaručuje kladnosť všetkých týchto sčítancov, čiže zachováame nerovnosť). V takomto súčine sa takmer všetky členy vykrátia

$$\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|} \cdot \frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|} \cdot \dots \cdot \frac{|a_m|}{|a_{m-1}|} = \frac{|a_m|}{|a_N|}$$

a celkovo má nerovnosť tvar

$$(L - \varepsilon)^{m-N} < \frac{|a_m|}{|a_N|} < (L + \varepsilon)^{m-N},$$

vynásobíme $|a_N|$ a umocníme $1/m$

$$|a_N|^{\frac{1}{m}} (L - \varepsilon)^{\frac{m-N}{m}} < |a_m|^{\frac{1}{m}} < |a_N|^{\frac{1}{m}} (L + \varepsilon)^{\frac{m-N}{m}}$$

.Tak ako v predchádzajúcich prípadoch opäť aplikujeme limes superior na všetky členy nerovnosti a dostávame

$$L - \varepsilon < \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{\frac{1}{m}} < L + \varepsilon.$$

Nakoľko $\varepsilon > 0$ je ľubovoľne malé, platí

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{\frac{1}{m}}.$$

Tým sme dokázali tretiu časť tvrdenia práve dokazovanej vety.

A teda platia všetky tri tvrdenia dokazovanej vety analogicky Vete (4.1.6). ■

R Polomer konvergence $0 < \rho < \infty$ radu (4.1) vypočítame pomocou vzťahu

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

■ **Príklad 4.3** Určme polomer konvergence a obor konvergence komplexného mocninového radu:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+j)^n}{n \cdot 2^n},$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2j)^{n-1}}{(n+1)^2 \cdot 3^n}.$

1. Stred konvergence daného radu je $z_0 = -j$ a n -tý koeficient je $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Polomer bude

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n}{n+1}} = 2.$$

Obor konvergence tohto radu je vnútro kružnice $|z+j| < 2$. Overíme ešte, ako je to s konvergenciou radu na hranici $|z+j| = 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+j)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Harmonický rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentný, a teda oborom konvergence radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+j)^n}{n \cdot 2^n}$ je $|z+j| < 2$.

2. Zrejme $z_0 = 2j$ a $a_n = \frac{1}{(n+1)^2 \cdot 3^n}$. Pre polomer konvergence preto platí

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 \cdot 3^n}{(n+2)^2 \cdot 3^{n+1}} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2 \cdot 3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Obor konvergence radu je $|z-2j| < 3$. Vyšetříme ešte konvergentnosť na hranici $|z-2j| = 3$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-2j|^{n-1}}{(n+1)^2 \cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n+1)^2 \cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot (n+1)^2}.$$

Použijeme porovnávacie kritérium. Zrejme $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{3 \cdot (n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentný harmonický rad, a preto je konvergentný aj k nemu minoritný rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot (n+1)^2}$ a oborom konvergence radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2j)^{n-1}}{(n+1)^2 \cdot 3^n}$ je teda kruh $|z-2j| \leq 3$. ■

Na určenie polomeru konvergence v Prípade (4.2) sme mohli takisto použiť postup z Príkladu (4.3) a naopak. Otázkou je, či môžeme túto zámennosť použiť naozaj vždy. Nasledujúci príklad nám ukáže výhodnosť podielového tvaru vzorca pre polomer konvergence mocninového radu v prípade, že koeficient a_n bude obsahovať faktoriál $n!$.

■ **Príklad 4.4** Určme polomer konvergence a obor konvergence mocninového radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} (z-5)^n.$$

Ako sme sa už zmienili, použijeme podielový tvar vzorca pre polomer konvergence, teda

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{7^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{7^n}{n!}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7^n}{n!}}{\frac{7^{n+1}}{(n+1) \cdot n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{7} = \infty.$$

Vidíme, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} (z-5)^n$ konverguje pre každé $z \in \mathbb{C}$.ⁱ ■

Tu by sme radi upozornili na jednu dôležitú skutočnosť. Vo Vete (4.1.7) predpokladáme existenciu limity podielu koeficientov, ak však táto limita neexistuje, je nutné použiť univerzálnejšie platný odmocninový vzťah pre polomer konvergence z Vety (4.1.6). Nepomohlo by ani nahradenie limity vo vzťahu Vety (4.1.7) na limes superior. Presvedčíme sa na nasledujúcej postupnosti. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktorej členy platí

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{pre } n \text{ párne,} \\ 2, & \text{pre } n \text{ nepárne.} \end{cases}$$

Potom zrejme platí

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2,$$

avšak polomer konvergence mocninového radu s koeficientmi z tejto postupnosti je

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

4.2 Funkcionálny rad komplexnej premennej

Na problematiku konvergence mocninového radu (4.1) môžeme nahliadať i optikou funkcionálneho radu komplexnej premennej.

Definícia 4.2.1 — Komplexný funkcionálny rad. Radom komplexných funkcií komplexnej premennej nazývame rad tvaru

$$f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad (4.2)$$

kde členy postupnosti $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ sú komplexné funkcie komplexnej premennej $z \in \mathbb{C}$.

ⁱ Ak by sme použili odmocninový tvar vzorca pre polomer konvergence, museli by sme počítať limitu

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{7^n}{n!} \right|}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}}{7},$$

čo je v porovnaní s podielovým tvarom omnoho zložitejšie.

R Obor konvergence komplexného funkcionálneho radu (4.2) hľadáme, podobne ako pri reálnych funkcionálnych radoch, použitím d'Alembertovho alebo Cauchyho odmocninového kritéria a pod.

■ **Príklad 4.5** Určme obor konvergence komplexného funkcionálneho radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+j)^n}{(n+1)(n+2)} (z-j)^n.$$

Použijeme d'Alembertovo podielové kritérium

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+j)^{n+1}}{(n+2)(n+3)} (z-j)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{(1+j)^n} \frac{1}{(z-j)^n} \right| \\ &= |z-j| \cdot |1+j| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+3} = |z-j| \cdot \sqrt{2} \cdot 1 < 1 \end{aligned}$$

a podobne Cauchyho odmocninovým kritériom dostávame

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(1+j)^n}{(n+1)(n+2)} (z-j)^n \right|} = |z-j| \cdot |1+j| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} \\ &= |z-j| \cdot |1+j| < 1. \end{aligned}$$

z uvedeného vyplýva, že obor konvergence je $|z-j| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Na hraničnej kružnici $|z-j| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ má rad tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+j)^n}{(n+1)(n+2)} |z-j|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+j)^n}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n.$$

Na určenie konvergentnosti tohto radu využijeme postačujúcu podmienku konvergentnosti 4.1.2 a porovnávacie kritérium, t. j. $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \frac{(1+j)^n}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n &\leq \frac{|1+j|^n}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n = \frac{(\sqrt{2})^n}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

a keďže konvergentný harmonický rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je majorantný ku radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+j)^n}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$ je aj tento konvergentný. A preto oborom konvergence komplexného radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+j)^n}{(n+1)(n+2)} (z-j)^n$ je $|z-j| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

■

Pre ďalšie úvahy nebude príliš podstatné správanie sa mocninového radu na hraničnej kružnici. Takisto nie vždy je samotné určenie jednoduché a tiež existujú prípady, kedy časť hraničnej kružnice konverguje a časť diverguje. A preto už v ďalšom texte od tejto požiadavky upúšťame.

4.3 Derivácia a jednoznačnosť mocninového radu

Označme si súčet mocninového radu $f(z)$. Pri tomto značení

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad (4.3)$$

prirodzene vyvstáva otázka, či je týmto spôsobom funkcia určená jednoznačne. Pri komplexnej funkcii nás samozrejme najviac zaujíma holomorfnosť. Práve o tom nám hovorí nasledujúca veta.

Veta 4.3.1 — Derivácia mocninového radu. Nech je funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ daná mocninovým radom (4.3), ktorý má polomer konvergence $\rho > 0$.

Potom je $f(z)$ holomorfná funkcia na obore konvergence radu (4.3) $|z - z_0| < \rho$ a jej derivácia $f'(z)$ je daná mocninovým radom

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad (4.4)$$

ktorý má ten istý polomer konvergence ρ .

Dôkaz. Prvú časť dôkazu, že oba rady (4.3) a (4.4) majú ten istý polomer konvergence, si ukážeme jednoduchým výpočtom

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{1}{n}} \right) \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Zložitejšie však bude dokázať, že funkcia $f(z)$ má deriváciu. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $z_0 = 0$. Nech z je ľubovoľný bod z vnútra konvergenčnej kružnice, t. j. $|z| < \rho$. Preto môžeme medzi ne vsunúť pomocné číslo R ,

$$|z| < R < \rho.$$

Takže z leží tiež v otvorenom kruhu $|z| < R$. Zvoľme si nejaký iný bod $w \neq z$, ktorý tiež leží v otvorenom kruhu $|z| < R$. Vyšetříme rozdiel diferencného podielu funkcie $f(z)$ v týchto bodoch a hodnoty radu (4.4) v bode z

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{w^n - z^n}{w - z} - n z^{n-1} \right). \quad (4.5)$$

Našou snahou bude ukázať, že pre $w \rightarrow z$ sa výraz na pravej strane blíži k nule. Okrem toho si všimneme, že výraz v zátvorke je pre $n = 1$ rovný nule, a preto nám stačí uvažovať pre $n \geq 2$. Pre tieto n má výraz v zátvorke poslednej sumy rovný

$$\begin{aligned} \frac{w^n - z^n}{w - z} - n z^{n-1} &= w^{n-1} + w^{n-2} z + \dots + w z^{n-2} + z^{n-1} - n z^{n-1} \\ &= w^{n-1} + w^{n-2} z + \dots + w z^{n-2} - (n-1) z^{n-1} \\ &= (w - z) (w^{n-2} + 2 w^{n-3} z + 3 w^{n-4} z^2 + \dots + (n-1) z^{n-2}) \\ &= (w - z) \sum_{k=1}^{n-1} k w^{n-k-1} z^{k-1}. \end{aligned}$$

Pretože $|z| < R$ a aj $|w| < R$ môžeme odhadnúť absolútnu hodnotu posledného výrazu

$$\begin{aligned} \left| (w - z) \sum_{k=1}^{n-1} k w^{n-k-1} z^{k-1} \right| &\leq |w - z| \sum_{k=1}^{n-1} k |w|^{n-k-1} |z|^{k-1} \leq |w - z| \sum_{k=1}^{n-1} k R^{n-2} \\ &= |w - z| R^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k = |w - z| R^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \\ &\leq |w - z| R^{n-2} n^2. \end{aligned}$$

Vráťme sa naspäť k výrazu (4.5), do ktorého použijeme práve odvodený odhad, a dostávame

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |w - z| R^{n-2} n^2 = |w - z| \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| R^{n-2}.$$

Podobne ako na začiatku dôkazu má mocninový rad s koeficientmi $n^2 |a_n|$ rovnaký polomer konvergence ρ ako pôvodný rad s koeficientmi a_n , keďže platí

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 |a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{2}{n}} \right) \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Preto je tento rad absolútne konvergentný v bode R a platí

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| R^{n-2}.$$

Odkiaľ pre náš výraz dostávame odhad

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \leq S |w - z|,$$

čo pre limitnú úvahu $w \rightarrow z$ implikuje požadované tvrdenie. ■

Na základe práve dokázanej Vety 4.3.1 vyplýva vlastnosť, že funkcia daná mocninovým radom je holomorfná. Dokonca podľa Dôsledku 3.1.3 dostávame, že je spojitá a ohraničená. Omnoho zaujímavejšie je, že nám Veta 4.3.1 umožňuje derivovať rad člen po člene a dokonca integrovať člen po člene.

Dôsledok 4.3.2 — Integrovanie mocninového radu. Nech je funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ daná mocninovým radom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

na otvorenom kruhu $|z - z_0| < \rho$.

Potom funkcia

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

je primitívna funkcia k funkcii $f(z)$ na $|z - z_0| < \rho$.

Dôkaz. Presvedčíme sa najskôr o tom, že oba rady konvergujú na tom istom obore konvergence, t. j. platí

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1} |a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ďalej funkcia $F(z)$ daná mocninovým radom je podľa Vety 4.3.1 holomorfná a platí

$$F'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z).$$

■

Uvažujme nasledujúcim spôsobom, derivácia funkcie $f(z)$ je funkcia $f'(z)$, ktorá je daná takisto mocninovým radom, je podľa Vety 4.3.1 holomorfnou funkciou, a preto jej derivácia $f''(z)$ je opäť mocninový rad vyhovujúci predpokladom Vety 4.3.1. Takýmto postupom by sme získali tvrdenie ďalšieho dôsledku Vety 4.3.1.

Dôsledok 4.3.3 — n -tá derivácia mocninového radu. Nech je funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ daná mocninovým radom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

na otvorenom kruhu $|z - z_0| < \rho$.

Potom má táto funkcia derivácie všetkých rádoov na tomto kruhu a pre $k \geq 0$ platí

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k.$$

Dôkaz. Deriváciou funkcie $f(z)$ podľa Vety 4.3.1 máme

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k},$$

čo po dosadení $z = z_0$ dáva

$$f^{(k)}(z_0) = k! \cdot a_k.$$

■

■ **Príklad 4.6** Určme obor konvergenzie mocninového radu a nájdime jeho deriváciu, ak je funkcia daná mocninovým radom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Daný mocninový rad má stred v bode nula a polomer konvergenzie, nakoľko koeficient obsahuje faktoriál, vypočítame pomocou podielového vzťahu

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Mocninový rad teda konverguje na celej komplexnej rovine $z \in \mathbb{C}$. Jeho derivácia má podľa Vety 4.3.1 tvar

$$f'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = f(z).$$

Mimoriadne zvláštny výsledok $f'(z) = f(z)$ dáva tušiť, že $f(z) = e^z$. ■

Pozrime sa ešte na jeden dôležitý záver z práve dokázaných tvrdení. Majme funkciu $f(z)$ danú mocninovým radom, ktorá je na istom okolí svojho stredy z_0 rovná nule. Potom zrejme aj všetky derivácie tejto funkcie sú $f^{(k)}(z) = 0$ na tom istom okolí, a zrejme aj $f^{(k)}(z) = 0$ pre $k \geq 0$. Z Dôsledku 4.3.3 vyplýva, že všetky koeficienty a_k sú rovné nule, a tým pádom aj funkcia $f(z) = 0$ na celom otvorenom kruhu konvergenzie. Teda nulovosť na akomkoľvek malom okolí stredy konvergenzie z_0 sa prejaví v nulovosti všade.

Túto skutočnosť môžeme preformulovať nasledujúcim spôsobom. Nech sú funkcie $f(z)$ a $g(z)$ dané mocninovým radom so spoločným stredom z_0 . Ak platí na nejakom okolí bodu z_0 rovnosť $f(z) = g(z)$, bude $f(z) = g(z)$ na celom kruhu konvergenencie. Tým sme v podstate povedali, že mocninový rad je jednoznačne určený v ľubovoľne malom okolí svojho stredy z_0 . Pre jednoznačnosť je dokonca postačujúca menšia množina ako okolie bodu.

Veta 4.3.4 — O jednoznačnosti mocninového radu. Nech je funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ daná mocninovým radom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

na otvorenom kruhu $|z - z_0| < \rho$.

Nech existuje postupnosť bodov $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$, ktorá leží vo vnútri otvoreného kruhu $|z - z_0| < \rho$ okrem bodu z_0 , taká, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$ a $f(z_k) = 0$.

Potom vo vnútri otvoreného kruhu $|z - z_0| < \rho$ platí

$$f(z) = 0.$$

Dôkaz. Matematickou indukciou ukážeme, že všetky $a_n = 0$.

1. Funkcia $f(z)$ je spojitá v bode z_0 , preto

$$a_0 = f(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = 0.$$

2. Nech $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1}$. Ukážeme, že potom aj $a_n = 0$. Z tohto indukčného predpokladu vyplýva, že mocninový rad začína až n -tou mocninou, t. j.

$$f(z) = a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \dots$$

Zavedieme si pomocnú funkciu

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} = a_n + a_{n+1} (z - z_0) + \dots,$$

ktorá je takisto mocninovým radom, a preto je spojitá v bode z_0 , a platí

$$a_n = \varphi(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(z_k)}{(z_k - z_0)^n} = 0.$$

■

Vetu 4.3.4 môžeme formulovať pre dvojicu funkcií v tvare nasledujúceho dôsledku.

Dôsledok 4.3.5 Nech sú funkcie $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ a $g(z) : \mathbb{C} \supset D_g \rightarrow \mathbb{C}$ dané mocninovým radom

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \\ g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Ak sa funkčné hodnoty $f(z_k)$ a $g(z_k)$ zhodujú pre nejakú postupnosť $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ konvergujúcu k z_0 ,

pričom $z_k \neq z_0$, potom pre všetky $n \geq 0$ je $a_n = b_n$, t. j. platí

$$f(z) = g(z).$$

4.4 Cvičenia

Cvičenie 4.1 Nájdite obor konvergenzie daných mocninových radov:

- | | |
|---|----------------------|
| a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+j)^n}{n!},$ | $[\infty > f+z]$ |
| b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z+2-j)^n,$ | $[0 = f-z+z]$ |
| c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z-1-j)^n,$ | $[\infty > f-1-z]$ |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1+j)^n}{n\sqrt{n}}.$ | $[1 > f+1+z]$ |

Cvičenie 4.2 Určte polomer konvergenzie daných mocninových radov:

- | | |
|--|---------------------|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n,$ | $[\frac{e}{1} = d]$ |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} z^n,$ | $[0 = d]$ |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n,$ | $[e = d]$ |
| d) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n) z^n,$ | $[\frac{e}{1} = d]$ |
| e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+j}\right)^n.$ | $[\frac{e}{1} = d]$ |

5. Elementárne funkcie komplexnej premennej

5.1 Lineárna funkcia

Definícia 5.1.1 Komplexná lineárna funkcia sa nazýva zobrazenie $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ktoré je určené vzťahom

$$f(z) = az + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{C}$, ($a \neq 0$).

R Z geometrického hľadiska je toto zobrazenie zložené z otočenia o uhol $\arg a$ okolo stredu súradnicovej sústavy a posunutia v smere vektora $\mathbf{b} = (\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b)$.

5.2 Lineárna lomená funkcia

Definícia 5.2.1 Komplexná lineárna lomená funkcia sa nazýva zobrazenie $f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ktoré je určené vzťahom

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ a navyše platí

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

Upravme funkciu na tvar

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(z + \frac{b}{a})}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}},$$

po dosadení

$$\alpha = \frac{a}{c}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad \gamma = \frac{d}{c},$$

dostaneme

$$f(z) = \alpha \cdot \frac{z + \beta}{z + \gamma}.$$

Dostali sme funkciu, ktorá závisí od troch parametrov α, β, γ .

Veta 5.2.1 Existuje jediná lineárna lomená funkcia, ktorá zobrazuje 3 rôzne body $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ do troch rôznych bodov $f_1, f_2, f_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ tak, že platí

$$z_1 \rightarrow f_1,$$

$$z_2 \rightarrow f_2,$$

$$z_3 \rightarrow f_3$$

a jej rovnica je daná

$$\frac{(f - f_1)(f_2 - f_3)}{(f - f_3)(f_2 - f_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

■ **Príklad 5.1** Nájďme lineárnu lomenú funkciu, ktorá zobrazuje body $-1, \infty, j$ na body $\infty, j, 1$.

Máme

$$z_1 = -1 \rightarrow \infty = f_1,$$

$$z_2 = \infty \rightarrow j = f_2,$$

$$z_3 = j \rightarrow 1 = f_3$$

odkiaľ dostaneme jednoznačnú funkciu

$$\begin{aligned} \frac{(f - f_1)(f_2 - f_3)}{(f - f_3)(f_2 - f_1)} &= \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}, \\ \frac{\left(\frac{f}{f_1} - 1\right)(f_2 - f_3)}{(f - f_3)\left(\frac{f_2}{f_1} - 1\right)} &= \frac{(z - z_1)\left(1 - \frac{z_3}{z_2}\right)}{(z - z_3)\left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)}, \\ \frac{(0 - 1)(j - 1)}{(f - 1)(0 - 1)} &= \frac{(z + 1)(1 - 0)}{(z - j)(1 - 0)}, \\ \frac{j - 1}{f - 1} &= \frac{z + 1}{z - j}, \\ (j - 1)(z - j) &= (z + 1)(f - 1), \\ zj - z + 1 + j &= zf - z + f - 1, \\ f(z) &= \frac{zj + 2 + j}{z + 1}, \end{aligned}$$

pre ktorú platí

$$f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{zj + 2 + j}{z + 1} = \infty = f_1,$$

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{zj + 2 + j}{z + 1} = j = f_2,$$

$$f(j) = \lim_{z \rightarrow j} \frac{zj + 2 + j}{z + 1} = 1 = f_3.$$

■

5.3 Mnohočlen (polynóm)

Definícia 5.3.1 *Mnohočlen* n -tého stupňa komplexnej premennej sa nazýva zobrazenie $f(z) : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, ktoré je určené vzťahom

$$f(z) = P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$.

Táto funkcia je holomorfná na $\mathbb{C}$ (funkcie holomorfné na celej Gaussovej rovine sa niekedy nazývajú *celé funkcie*), pretože platí

$$f'(z) = P'_n(z) = a_0 n z^{n-1} + a_1 (n-1) z^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Z fundamentálnej vety algebry vyplýva, že každý polynóm $P_n(z)$, $n \geq 1$ má v $\mathbb{C}$ aspoň jeden koreň, a teda môžeme mnohočlen komplexnej premennej rozložiť na súčin koreňových činiteľov

$$P_n(z) = a_0 (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m},$$

kde $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, sú korene mnohočlena $P_n(z)$ a k_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m$ sú ich násobnosti ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$).

Z toho vyplýva, že každý bod roviny patrí do množiny funkčných hodnôt zobrazenia $f(z) = P_n(z)$ a má najviac n rôznych vzorov.

Funkcia $f(z) : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = z^n$ je špeciálnym prípadom mnohočlena n -tého stupňa, pre ktorú platí

$$f(0) = 0^n = 0,$$

$$f(\infty) = \infty^n = \infty.$$

Okrem toho pre $n = 1$ dostávame identické zobrazenie $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = z$.

5.4 n -tá odmocnina komplexného čísla

Definícia 5.4.1 Nech $n \geq 2$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Potom inverznú funkciu k funkcii $f(z) : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = z^n$ nazývame *hlavnou vetvou n -tej odmocniny* a označujeme

$$f^{-1}(z) = \sqrt[n]{z}.$$

Množina všetkých riešení rovnice $w^n = z$ je

$$a_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{j \frac{\varphi + 2k\pi}{n}},$$

kde $\varphi = \arg z$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Vidíme, že funkcia $f(z) = \sqrt[n]{z}$ je viacznačnou funkciou.

■ **Príklad 5.2** Nájdime všetky riešenia rovnice

$$z^4 - 16 = 0.$$

Zrejme hľadáme všetky komplexné čísla, ktoré vyhovujú viacznačnému priradeniu $z = \sqrt[4]{16}$. Komplexné číslo 16 má argument $\varphi = 0$, preto sú riešeniami štyri komplexné čísla a_k , kde $k = 0, 1, 2, 3$,

$$a_0 = \sqrt[4]{|16|} e^{j \frac{0+2 \cdot 0 \pi}{4}} = 2e^0 = 2,$$

$$a_1 = \sqrt[4]{|16|} e^{j \frac{0+2 \cdot 1 \pi}{4}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2(0 + j) = 2j,$$

$$a_2 = \sqrt[4]{|16|} e^{j \frac{0+2 \cdot 2 \pi}{4}} = 2(\cos \pi + j \sin \pi) = 2(-1 + 0) = -2,$$

$$a_3 = \sqrt[4]{|16|} e^{j \frac{0+2 \cdot 3 \pi}{4}} = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + j \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 2(0 - j) = -2j.$$

Môžeme si všimnúť, že aj číslo 2 (jediné riešenie rovnice $z = \sqrt[4]{16}$ v $\mathbb{R}$) je jedným z riešení tejto rovnice v $\mathbb{C}$. ■

5.5 Exponenciálna a goniometrické funkcie, Eulerove vzorce

Už v predchádzajúcej kapitole sme si ukázali, že funkcia môže byť daná mocninovým radom a tiež, že toto určenie je jednoznačné. Preto niekoľko nasledujúcich elementárnych funkcií si nateraz budeme definovať pomocou týchto mocninových rozvojov, pričom samotnej metodike odvodovania sa budeme venovať neskôr.

Definícia 5.5.1 Zobrazenie $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované komplexným mocninovým radom

$$\exp z = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

sa nazýva *exponenciálna funkcia komplexnej premennej*.

Definícia 5.5.2 Zobrazenia $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované vzťahmi

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}.$$

nazývame *goniometrické funkcie komplexnej premennej*.

Priamo z definície goniometrických funkcií je vidieť, že platí

$$\begin{aligned} e^0 &= 1, \\ \sin 0 &= 0, \\ \cos 0 &= 1 \end{aligned}$$

a takisto vidíme, že funkcia $\sin z$ je *nepárna*, t. j. pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\sin(-z) = -\sin z$$

a funkcia $\cos z$ je *párna*, t. j. pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\cos(-z) = \cos z.$$

Ak si rozvoj funkcie e^{jz} upravíme (oddělíme reálnu časť od imaginárnej)

$$\begin{aligned} e^{jz} &= 1 + jz + \frac{j^2 z^2}{2} + \frac{j^3 z^3}{3!} + \frac{j^4 z^4}{4!} + \frac{j^5 z^5}{5!} + \dots + \frac{j^n z^n}{n!} + \dots \\ &= 1 + jz - \frac{z^2}{2} - j \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + j \frac{z^5}{5!} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) \\ &\quad + j \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) \\ &= \cos z + j \sin z, \end{aligned}$$

čo je prvý Eulerov vzorec. Podobne si upravíme rozvoj funkcie e^{-jz}

$$\begin{aligned}
 e^{-jz} &= 1 - jz + \frac{j^2 z^2}{2} - \frac{j^3 z^3}{3!} + \frac{j^4 z^4}{4!} - \frac{j^5 z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{j^n z^n}{n!} + \dots \\
 &= 1 - jz - \frac{z^2}{2} + j \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - j \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{j^n z^n}{n!} + \dots \\
 &= \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) \\
 &\quad - j \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) \\
 &= \cos z - j \sin z.
 \end{aligned}$$

Tento výsledok dostaneme i použitím parity goniometrických funkcií

$$e^{-jz} = \cos(-z) + j \sin(-z) = \cos z - j \sin z.$$

A následne sčítaním alebo odčítaním vzťahov pre e^{jz} a e^{-jz} dostávame

$$\begin{aligned}
 e^{jz} + e^{-jz} &= 2 \cos z &\Rightarrow \cos z &= \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \\
 e^{jz} - e^{-jz} &= 2j \sin z &\Rightarrow \sin z &= \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j},
 \end{aligned}$$

čo sú tri tzv. *Eulerove vzorce (formuly)*

$$e^{jz} = \cos z + j \sin z,$$

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j},$$

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}.$$

5.6 Hyperbolické funkcie

Definícia 5.6.1 Zobrazenia definované vzťahmi

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}.$$

nazývame *hyperbolické funkcie komplexnej premennej*.

Funkcia $\sinh z$ je *nepárna*, t. j. pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\sinh(-z) = -\sinh z,$$

funkcia $\cosh z$ je *párna*, t. j. pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\cosh(-z) = \cosh z.$$

Nie je ťažké odvodiť, že pre hyperbolické funkcie platia analógie Eulerových vzorcov

$$\begin{aligned}\sin jz &= \frac{e^{jjz} - e^{-jjz}}{2j} = \sin z = j \frac{e^z - e^{-z}}{2} = j \sinh z, \\ \cos jz &= \frac{e^{jjz} + e^{-jjz}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z, \\ \sinh jz &= \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2} = j \sin z, \\ \cosh jz &= \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \cos z.\end{aligned}$$

Podobne ako pre goniometrické funkcie, aj pre hyperbolické platia tzv. súčtové vzorce

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.\end{aligned}$$

Ich použitím pre komplexnú premennú $z = x + jy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, dostávame

$$\begin{aligned}\sinh(x+jy) &= \sinh x \cos y + j \cosh x \sin y, \\ \cosh(x+jy) &= \cosh x \cos y + j \sinh x \sin y.\end{aligned}$$

Odkiaľ

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \sinh z &= \sinh x \cos y, \\ \operatorname{Im} \sinh z &= \cosh x \sin y\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \cosh z &= \cosh x \cos y, \\ \operatorname{Im} \cosh z &= \sinh x \sin y.\end{aligned}$$

Obdobne odvodíme pre súčtové vzorce goniometrických funkcií

$$\begin{aligned}\sin(x+jy) &= \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y, \\ \cos(x+jy) &= \cos x \cosh y + j \sin x \sinh y.\end{aligned}$$

Odkiaľ

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \sin z &= \sin x \cosh y, \\ \operatorname{Im} \sin z &= \cos x \sinh y\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \cos z &= \cos x \cosh y, \\ \operatorname{Im} \cos z &= -\sin x \sinh y.\end{aligned}$$

■ **Príklad 5.3** Nájďme všetky riešenia rovnice

$$4 \cos z + 5 = 0.$$

Rovnicu upravíme

$$\cos z = -\frac{5}{4},$$

odtiaľ pre reálnu a imaginárnu zložku dostávame

$$\begin{aligned} I. : \operatorname{Re} \cos z &= \cos x \cdot \cosh y = -\frac{5}{4}, \\ II. : \operatorname{Im} \cos z &= -\sin x \cdot \sinh y = 0. \end{aligned}$$

Z II. dostávame

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \sinh y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Rovnosť II. je splnená, ak $x = k\pi$ alebo $y = 0$ a rovnosť I.

$$\cos x \cdot \cosh y = -\frac{5}{4},$$

nakoľko $x = k\pi$ ($\cos(k\pi) = (-1)^k$), bude mať tvar

$$\begin{aligned} \cos(k\pi) \cdot \cosh y &= -\frac{5}{4}, \\ (-1)^k \cdot \cosh y &= -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Budeme rozlišovať zvlášť prípad párneho a zvlášť prípad nepárneho $k \in \mathbb{Z}$.

Nech $k = 2m$

$$\begin{aligned} (-1)^{2m} \cdot \cosh y &= -\frac{5}{4}, \\ \cosh y &= -\frac{5}{4}, \\ \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) &= -\frac{5}{4}, \quad / \cdot 2 \\ e^y + e^{-y} &= -\frac{5}{2}, \quad / \cdot 2e^y \\ 2e^{2y} + 2 &= -5e^y, \\ 2(e^y)^2 + 5e^y + 2 &= 0, \quad / \text{subst. } t = e^y \\ 2t^2 + 5t + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Kvadratická rovnica má riešenie tvaru

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} t_1 = -\frac{1}{2}, \\ t_2 = -2. \end{cases}$$

Vrátením sa k pôvodnej premennej y pomocou vzťahu $y = \ln t$ vidíme, že

$$\begin{aligned} t_1 &= e^{y_1} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = e^{y_1} \Rightarrow y_1 = \ln\left(-\frac{1}{2}\right) \notin \mathbb{R}, \\ t_2 &= e^{y_2} \Leftrightarrow -2 = e^{y_2} \Rightarrow y_2 = \ln(-2) \notin \mathbb{R}. \end{aligned}$$

pre t_1 a t_2 nie sú hodnoty prirodzeného logaritmu definované. Preto riešením pre párny koeficient $k = 2m$ je (existuje iba imaginárna zložka $y = 0$)

$$z_{k=2m} = x + jy = k\pi + j0 = 2m\pi.$$

Nech $k = 2m + 1$

$$\begin{aligned} (-1)^{2m+1} \cdot \cosh y &= -\frac{5}{4}, \\ -\cosh y &= -\frac{5}{4}, \\ \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}) &= \frac{5}{4}, \quad / \cdot 2 \\ e^y + e^{-y} &= \frac{5}{2}, \quad / \cdot 2e^y \\ 2e^{2y} + 2 &= 5e^y, \\ 2(e^y)^2 - 5e^y + 2 &= 0, \quad / \text{subst. } t = e^y \\ 2t^2 - 5t + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Riešením kvadratickej rovnice je

$$t_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} t_3 = 2, \\ t_4 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Čiže hľadané $y \in \mathbb{R}$ sú

$$\begin{aligned} t_3 &= e^{y_3} \Leftrightarrow 2 = e^{y_3} \Rightarrow y_3 = \ln 2, \\ t_4 &= e^{y_4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{y_4} \Rightarrow y_4 = \ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2. \end{aligned}$$

Riešením pre nepárny koeficient $k = 2m + 1$ ($x = k\pi = (2m + 1)\pi$) je

$$z_{k=2m+1} = x + jy = (2m + 1)\pi \pm j \ln 2.$$

Celkovo sme našli dve riešenia

$$\begin{aligned} z_{k=2m} &= 2m\pi, \\ z_{k=2m+1} &= (2m + 1)\pi \pm j \ln 2. \end{aligned}$$

■

■ Príklad 5.4

Riešme goniometrickú rovnicu

$$\sin z = j\pi.$$

Kedže platí

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sin z &= \sin x \cosh y = 0, \\ \operatorname{Im} \sin z &= \cos x \sinh y = \pi, \end{aligned}$$

z reálnej zložky dostávame

$$\operatorname{Re} \sin z : \quad \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \cosh y = 0.$$

Avšak $\cosh y \geq 1$, a teda nikdy sa nebude rovnať nule, našli sme iba riešenie $x = k\pi$, ktoré dosadíme do rovnosti

$$\operatorname{Im} \sin z : \quad \cos k\pi \sinh y = \pi,$$

kde $\cos k\pi = (-1)^k$

$$(-1)^k \sinh y = \pi.$$

Hľadáme riešenie pre párne $k = 2m$, čiže upravíme

$$\begin{aligned} (-1)^{2m} \sinh y &= \pi, \\ \sinh y &= \pi, \\ \frac{1}{2} (e^y - e^{-y}) &= \pi, & / \cdot 2e^y \\ e^{2y} - 2\pi e^y - 1 &= 0, & / \text{subst. } t = e^y \\ t^2 - 2\pi \cdot t - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Diskriminantom tejto kvadratickej rovnice je

$$\begin{aligned} D &= 4\pi^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4(\pi^2 + 1), \\ \sqrt{D} &= 2\sqrt{\pi^2 + 1} \end{aligned}$$

a pre jej korene platí

$$t_{1,2} = \frac{2\pi \pm 2\sqrt{\pi^2 + 1}}{2} = \begin{cases} t_1 = \pi + \sqrt{\pi^2 + 1}, \\ t_2 = \pi - \sqrt{\pi^2 + 1}. \end{cases}$$

Opäť si môžeme všimnúť, že $t_2 = \pi - \sqrt{\pi^2 + 1} < 0$ a preto dostávame iba jediné riešenie

$$y_1 = \ln t_1 = \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}).$$

Riešenie pre párne $k = 2m$ má potom tvar

$$z_{k=2m} = x + jy = k\pi + j \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}) = 2m\pi + j \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}).$$

Teraz sa budeme zaoberať riešením pre $k = 2m + 1$, t. j.

$$\begin{aligned} (-1)^{2m+1} \sinh y &= \pi, \\ -\sinh y &= \pi, \\ -\frac{1}{2} (e^y - e^{-y}) &= \pi, & / \cdot 2e^y \\ e^{2y} + 2\pi e^y - 1 &= 0, & / \text{subst. } t = e^y \\ t^2 + 2\pi \cdot t - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Pre diskriminant tejto kvadratickej rovnice platí

$$\begin{aligned} D &= 4\pi^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4(\pi^2 + 1), \\ \sqrt{D} &= 2\sqrt{\pi^2 + 1}. \end{aligned}$$

A jej korene sú

$$t_{3,4} = \frac{-2\pi \pm 2\sqrt{\pi^2 + 1}}{2} = \begin{cases} t_3 = -\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}, \\ t_4 = -\pi - \sqrt{\pi^2 + 1}. \end{cases}$$

Keďže $t_4 = -\pi - \sqrt{\pi^2 + 1} < 0$, máme opäť iba jedno riešenie $y_3 = \ln t_3 = \ln(-\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})$, a preto

$$z_{k=2m+1} = x + jy = (2m+1)\pi + j \ln(-\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}).$$

Našli sme teda dve riešenia

$$\begin{aligned} z_{k=2m} &= 2m\pi + j \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}), \\ z_{k=2m+1} &= (2m+1)\pi + j \ln(-\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}). \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 5.5** Rozložme funkciu $\sin z$ na reálnu a imaginárnu časť a vypočítajme $|\cos z|$.

Funkciu $\sin z$ rozložíme pomocou Eulerovho vzorca a následne použijeme rozpis pre komplexnú premennú $z = x + jy$

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}) = \frac{1}{2}(e^{j(x+jy)} + e^{-j(x+jy)}) \\ &= \frac{1}{2}((\cos x + j \sin x)e^{-y} + (\cos x - j \sin x)e^y) \\ &= \frac{1}{2}(\cos x(e^y + e^{-y}) + j \sin x(e^y - e^{-y})) \\ &= \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y. \end{aligned}$$

Čím sme získali reálnu a imaginárnu zložku a môžeme zistiť $|\cos z|$

$$\begin{aligned} |\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y} = \sqrt{\cos^2 x \cosh^2 y + (1 - \cos^2 x) \sinh^2 y} \\ &= \sqrt{\cos^2 x \cosh^2 y + \sinh^2 y - \cos^2 x \sinh^2 y} = \sqrt{\cos^2 x \underbrace{(\cosh^2 y - \sinh^2 y)}_{=1} + \sinh^2 y} \\ &= \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}. \end{aligned}$$

Na rozdiel od reálnej funkcie $\cos x$ nie je absolútna hodnota komplexnej premennej $\cos z$ ohraničená. ■

5.7 Logaritmická funkcia

Definícia 5.7.1 Inverznú funkciu k funkcii $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$ nazývame *hlavnou vetvou logaritmu* a označujeme

$$\lg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} : \lg z = w \Leftrightarrow z = e^w.$$

R Ak $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

$$\lg z = w \Leftrightarrow w = \lg z = \ln |z| + j \arg z.$$

R Logaritmická funkcia je zrejme opäť viacznačnou funkciou, a preto môžeme definovať zovšeobecnený logaritmus

$$\text{Lg } z = \ln |z| + j(\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

■ **Príklad 5.6** Vypočítajme $\lg z$ a $\text{Lg } z$, ak $z = 8\sqrt{3} - j8$.

Podľa formuly vyššie potrebujeme určiť modul a argument čísla z , teda

$$|z| = \sqrt{8^2 \cdot 3 + 8^2} = \sqrt{8^2 \cdot 4} = \sqrt{8^2 \cdot 2^2} = 8 \cdot 2 = 16.$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = \arg z = \frac{11}{6}\pi.$$

A preto

$$\lg z = \ln 16 + j \frac{11}{6}\pi,$$

$$\text{Lg } z = \ln 16 + j \left(\frac{11}{6}\pi + 2k\pi \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

■

5.8 Mocninová funkcia

Definícia 5.8.1 Viacznačnú funkciu

$$z^\alpha = e^{\text{Lg } z^\alpha} = e^{\alpha \cdot \text{Lg } z}$$

nazývame *mocninová funkcia*.

■ **Príklad 5.7** Určme všetky hodnoty j^j .

Zadaný výraz si rozpíšeme

$$j^j = e^{\text{Lg } j^j} = e^{j \cdot \text{Lg } j} = \left/ \begin{aligned} \text{Lg } j &= \ln |j| + j(\varphi + 2k\pi) \\ &= \ln 1 + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ &= j\pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right) \end{aligned} \right/ = e^{jj\pi(\frac{1}{2}+2k)} = e^{-\pi(\frac{1}{2}+2k)},$$

kde $k \in \mathbb{Z}$.

■

5.9 Cyklometrické funkcie

Definícia 5.9.1 Inverzné funkcie ku goniometrickým funkciám nazývame *cyklometrické* a definujeme ich nasledujúcim spôsobom

$$\arcsin z = w \Leftrightarrow z = \sin w,$$

$$\arccos z = w \Leftrightarrow z = \cos w,$$

$$\arctan z = w \Leftrightarrow z = \tan w,$$

$$\text{arccot } z = w \Leftrightarrow z = \cot w.$$

R Pre explicitné tvary cyklometrických funkcií platí, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$w = \arcsin z = -j \text{Lg} \left(jz \pm \sqrt{1 - z^2} \right),$$

$$w = \arccos z = -j \text{Lg} \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$w = \arctan z = \frac{j}{2} \text{Lg} \left(\frac{j - z}{j + z} \right), \quad z \neq \pm 1,$$

$$w = \text{arccot } z = \frac{j}{2} \text{Lg} \left(\frac{z + j}{z - j} \right), \quad z \neq \pm 1.$$

Ukážeme si odvodenie explicitného vzorca pre funkciu $w = \arccos z$.

$$\arccos z = w \quad \Leftrightarrow \quad z = \cos w,$$

vyjadríme w použitím Eulerových vzťahov

$$\begin{aligned} z &= \frac{e^{jw} + e^{-jw}}{2}, \\ 2z &= e^{jw} + e^{-jw}, \quad / \cdot e^{jw} \\ 2ze^{jw} &= e^{2jw} + 1, \\ (e^{jw})^2 - 2z(e^{jw}) + 1 &= 0, \quad / \text{subst. } t = e^{jw} \\ t^2 - 2zt + 1 &= 0, \end{aligned}$$

vyriešime kvadratickú rovnicu pre $z \in \mathbb{C}$, teda aj nasledujúca odmocnina je komplexnou odmocninou

$$t_{1,2} = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = z \pm \sqrt{z^2 - 1},$$

odkiaľ zrejme

$$e^{jw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1},$$

následne použijeme logaritmus komplexnej premennej

$$\begin{aligned} \text{Lg } e^{jw} &= \text{Lg} \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right), \\ jw &= \text{Lg} \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right), \\ w &= \frac{1}{j} \text{Lg} \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right), \\ w &= -j \text{Lg} \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

Podobne odvodíme explicitný vzorec pre funkciu $w = \arctan z$. Ostatné odvodenia sú analogické.

$$\arctan z = w \quad \Leftrightarrow \quad z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w},$$

použitím známych funkcií

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{j} \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{e^{jw} + e^{-jw}}, \quad / \cdot j (e^{jw} + e^{-jw}) \\ jz(e^{jw} + e^{-jw}) &= e^{jw} - e^{-jw}, \quad / \cdot e^{jw} \\ jze^{2jw} + zj &= e^{2jw} - 1, \\ jze^{2jw} - e^{2jw} &= -jz - 1, \quad / \cdot (-1) \\ e^{2jw} - jze^{2jw} &= 1 + jz, \\ e^{2jw} &= \frac{1 + jz}{1 - jz}, \end{aligned}$$

odkiaľ

$$w = \frac{1}{2j} \text{Lg} \left(\frac{1 + jz}{1 - jz} \right) = -\frac{j}{2} \text{Lg} \left(\frac{1 + jz}{1 - jz} \right) = \frac{j}{2} \text{Lg} \left(\frac{1 - jz}{1 + jz} \right).$$

■ **Príklad 5.8** Nájdime riešenia rovnice

$$\tan z = 3j$$

v tvare $z = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Im} z$.

Riešením budú čísla

$$\begin{aligned} z &= \arctan(3j) = \frac{j}{2} \operatorname{Lg} \left(\frac{j - 3j}{j + 3j} \right) = \frac{j}{2} \operatorname{Lg} \left(\frac{-2j}{4j} \right) = \frac{j}{2} \operatorname{Lg} \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{j}{2} \left(\ln \left| -\frac{1}{2} \right| + j (\arg z + 2k\pi) \right) = \frac{j}{2} \left(\ln \frac{1}{2} + j (\pi + 2k\pi) \right) \\ &= -\left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) + j \ln \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. ■

5.10 Hyperbolometrické funkcie

Definícia 5.10.1 Inverzné funkcie ku hyperbolickým funkciám nazývame *hyperbolometrické* a definujeme ich nasledujúcim spôsobom

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} z &= w & \Leftrightarrow & z = \sinh w, \\ \operatorname{arcosh} z &= w & \Leftrightarrow & z = \cosh w, \\ \operatorname{artanh} z &= w & \Leftrightarrow & z = \tanh w, \\ \operatorname{arcoth} z &= w & \Leftrightarrow & z = \coth w. \end{aligned}$$

R Explicitné tvary *hyperbolometrických funkcií* sú nasledujúce, $\forall z \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} w &= \operatorname{arsinh} z = \operatorname{Lg} \left(z + \sqrt{1 + z^2} \right), \\ w &= \operatorname{arcosh} z = \operatorname{Lg} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \\ w &= \operatorname{artanh} z = \frac{1}{2} \operatorname{Lg} \frac{1+z}{1-z}, \quad z \neq \pm 1, \\ w &= \operatorname{arcoth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Lg} \frac{z+1}{z-1}, \quad z \neq \pm 1. \end{aligned}$$

5.11 Cvičenia

Cvičenie 5.1 Nájdite lineárnu lomenú funkciu, pre ktorú platí:

- $f(0) = 0, f(1+j) = 2+2j, f(2j) = 4,$
- $f(-1) = j, f(j) = \infty, f(1+j) = 1,$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}j\right) = \infty, f(2) = 2,$
- $f(j) = 0, f(\infty) = 1, f(-j) = \infty.$

$$\begin{aligned} \left[\frac{f-z}{z\bar{z}} = (z)f \right] \\ \left[\frac{(f-z)\bar{z}}{f\bar{z}-9+z(f\bar{z}+1)} = (z)f \right] \\ \left[\frac{(f-\frac{1}{2})-z(f-1)\bar{z}}{(f-1)\bar{z}-z(f\bar{z}-1)} = (z)f \right] \\ \left[\frac{f+z}{f-z} = (z)f \right] \end{aligned}$$

Cvičenie 5.2 Overte, že platí:

- a) $e^{Lg z} = z$,
- b) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- c) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$,
- d) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

Cvičenie 5.3 Nájdite reálnu a imaginárnu časť a absolútnu hodnotu funkcií:

a) $\sin z$,

$$\left[\frac{\sin 2x + i \cosh 2y}{\sqrt{\sin^2 2x + \cosh^2 2y}}, \frac{\cos 2x + i \sinh 2y}{\sqrt{\sin^2 2x + \cosh^2 2y}} \right]$$

b) $\tan z$,

$$\left[\frac{\sin 2x + i \cosh 2y}{\cos 2x + i \sinh 2y}, \frac{\sin 2x + i \cosh 2y}{\cos 2x + i \sinh 2y} \right]$$

c) $\sinh z$,

$$\left[\frac{\sinh 2x + i \cosh 2y}{\sqrt{\sinh^2 2x + \cosh^2 2y}}, \frac{\cosh 2x + i \sinh 2y}{\sqrt{\sinh^2 2x + \cosh^2 2y}} \right]$$

d) $\tanh z$.

$$\left[\frac{\sinh 2x + i \cosh 2y}{\cosh 2x + i \sinh 2y}, \frac{\cosh 2x + i \sinh 2y}{\cosh 2x + i \sinh 2y} \right]$$

Cvičenie 5.4 Nájdite všetky riešenia rovnice:

a) $\sin z = \frac{4}{3}j$,

$$\left[\mathbb{Z} \ni k, \ln \left(\frac{4}{3} \right) + i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \right]$$

b) $\cos z = \sqrt{5}$,

$$\left[\mathbb{Z} \ni k, \ln \left(\sqrt{5} \right) + i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \right]$$

c) $\sin z = \frac{5}{3}$,

$$\left[\mathbb{Z} \ni k, \ln \left(\frac{5}{3} \right) + i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \right]$$

d) $\cos z = j\sqrt{3}$,

$$\left[\mathbb{Z} \ni k, \ln \left(\sqrt{3} \right) + i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \right]$$

e) $\cos z = j2\sqrt{2}$,

$$\left[\mathbb{Z} \ni k, \ln \left(2\sqrt{2} \right) + i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \right]$$

f) $\sin z + \cos z = 2$,

$$\left[\mathbb{Z} \ni k, \ln \left(2 \right) + i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \right]$$

g) $\tan z = \frac{5}{3}j$.

$$\left[\mathbb{Z} \ni k, \ln \left(\frac{5}{3} \right) + i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \right]$$

6. Integrál komplexnej premennej

6.1 Krivka v Gaussovej rovine komplexných čísel

Parametrické vyjadrenie krivky Γ v Gaussovej rovine (resp. parametrická rovnica) je dané predpisom

$$z(t) = x(t) + jy(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}.$$

Uvedieme niekoľko metód parametrizácie kriviek v Gaussovej rovine. Celá problematika je známa z teórie funkcie viac premenných, kedy vektorový zápis je nahradený zložkovým zápisom zvlášť pre reálnu a zvlášť pre imaginárnu zložku.

■ **Príklad 6.1** Nájdime parametrické vyjadrenie krivky v Gaussovej rovine paraboly $y = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$.

Vyjadríme si funkciu po zložkách

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \\ y(t) &= t^2 - 1, \quad t \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Parametrická rovnica má tvar

$$z(t) = t + j(t^2 - 1), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

■ **Príklad 6.2** Určme parametrické vyjadrenie kružnice $x^2 + y^2 = \rho^2$ v Gaussovej rovine.

Použijeme polárne súradnice

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho \cos t, \\ y(t) &= \rho \sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

a parametrická rovnica má tvar

$$z(t) = \rho \cos t + j\rho \sin t = \rho e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

6.2 Integrál funkcie komplexnej premennej

Sformulujeme definíciu integrálu funkcie komplexnej premennej, uvedieme niektoré jeho základné vlastnosti a metodiku výpočtu.

Definícia 6.2.1 — Integrál funkcie komplexnej premennej. Nech funkcia $f(z)$ je definovaná a ohraničená na orientovanej krivke Γ , ktorá má parametrické vyjadrenie

$$z(t) = x(t) + jy(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Nech *delenie* D krivky Γ je dané deliacimi bodmi $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{p_n}$, kde p_n je počet deliacich bodov delenia D .

Nech *normou delenia* $v(D)$ je dĺžka maximálneho oblúka $\widehat{z_{k-1}z_k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, p_n$, t. j. $v(D) = \max\{|z_k - z_{k-1}|, k = 1, 2, \dots, p_n\}$.

Nech je daná *normálna postupnosť delení*^a krivky Γ .

Ak na každom oblúku $\widehat{z_{k-1}z_k}$ zvolíme ľubovoľný bod τ_k , potom integrálnym súčtom funkcie $f(z)$, vzhľadom na delenie D a pre voľbu bodov τ_k , rozumieme

$$S(f, D, \tau) = \sum_{k=1}^{p_n} f(\tau_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Číslo I sa nazýva integrál funkcie $f(z)$ po orientovanej krivke Γ , ak pre každú normálnu postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ a pre ľubovoľnú voľbu bodov τ^n je limita postupnosti integrálnych súčtov $\{S(f, D_n, \tau^n)\}$ rovná číslu I , t. j.

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \{S(f, D_n, \tau^n)\}.$$

^aPostupnosť delení je normálna, ak príslušná postupnosť noriem delení konverguje k nule.

R Integrál funkcie $f(z)$ po orientovanej krivke Γ budeme označovať

$$\int_{\Gamma} f(z) dz$$

a funkciu $f(z)$, pre ktorú existuje integrál po krivke Γ , budeme nazývať *integrovateľná* na krivke Γ .

Veta 6.2.1 — Základné vlastnosti integrálu komplexnej premennej. Nech funkcie $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ a $g(z) : \mathbb{C} \supset D_g \rightarrow \mathbb{C}$ sú v oblasti Ω integrovateľné, $\Omega \subset D_f$, $\Omega \subset D_g$.

Nech $\Gamma \in \Omega$ je Jordanova krivka.

1. Potom platí

$$\int_{\Gamma} (k_1 f(z) \pm k_2 g(z)) dz = k_1 \int_{\Gamma} f(z) dz \pm k_2 \int_{\Gamma} g(z) dz,$$

kde $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.

2. Nech $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \wedge \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, potom platí

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

3. Nech krivka Γ^* je totožná s krivkou Γ , ale má opačnú orientáciu, potom platí

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma^*} f(z) dz.$$

Dôkaz. Analogický ako v prípade krivkového integrálu reálnej premennej. ■

Metódu výpočtu integrálu komplexnej premennej po krivke Γ nám určí nasledujúca veta, pri ktorej dôkaze budeme potrebovať jednu pomocnú lemu.

Lema 6.2.2 Nech Γ je jednoduchá, orientovaná, po častiach hladká krivka s parametrickým vyjadrením

$$z = z(t) = x(t) + jy(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Nech $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, $d_n = \{\alpha = t_0, t_1, \dots, t_{p_n} = \beta\}$ je postupnosť delení intervalu $[\alpha, \beta]$ a nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, $D_n = \{z_0, z_1, \dots, z_{p_n}\}$ je postupnosť delení krivky Γ .

Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ je delenie D_n vytvorené delením d_n pomocou parametrického vyjadrenia, kde $z_k = z(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, p_n$.

Potom postupnosť $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna práve vtedy, keď je normálna postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Dôkaz. Dôkaz iba v krátkosti načrtne. Predpoklad hladkosti krivky znamená, že v parametrickom vyjadrení $z = z(t)$ sú funkcie $z(t)$, $z'(t)$ spojité na príslušnom uzavretom intervale a tiež $z'(t) \neq 0$. Preto je funkcia $z(t)$ spojitá a prostá, a teda aj jej inverzná funkcia je rovnomerne spojitá. Tvrdenie vyplýva z definície rovnomernej spojitosti týchto funkcií. ■

Veta 6.2.3 — Integrovaťnosť funkcie komplexnej premennej. Nech Γ je jednoduchá, orientovaná, po častiach hladká krivka s parametrickým vyjadrením

$$z = z(t) = x(t) + jy(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je definovaná a ohraničená na Γ .

Funkcia $f(z)$ je integrovateľná na krivke Γ práve vtedy, keď je funkcia $f(z(t)) \cdot z'(t)$ integrovateľná na $[\alpha, \beta]$ a platí

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \pm \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) dt,$$

kde znamienko znamená kladnú (súhlasnú), alebo zápornú (nesúhlasnú) orientáciu krivky Γ so svojím parametrickým vyjadrením.

Dôkaz. Krivka Γ je hladká a súhlasne orientovaná s parametrickým vyjadrením $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, preto sú $z(t)$, $z'(t)$ spojité na $[\alpha, \beta]$ a $z'(t) = 0$ iba v konečnom počte bodov.

Nech $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení intervalu $[\alpha, \beta]$, $d_n = \{\alpha = t_0^n, t_1^n, \dots, t_{p_n}^n = \beta\}$, pričom $\alpha = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = \beta$. Uvažujme ľubovoľný výber bodov $\tau^n = (\tau_1^n, \tau_2^n, \dots, \tau_{p_n}^n)$, kde $\tau_k^n \in [t_{k-1}^n, t_k^n]$, $k = 1, 2, \dots, p_n$. Následne vytvoríme integrálny súčet funkcie $\varphi(t) = f(z(t))z'(t)$ pre delenie d_n a výber bodov τ^n

$$S(\varphi, d_n, \tau^n) = \sum_{k=1}^{p_n} f(z(\tau_k^n)) z'(\tau_k^n) (t_k^n - t_{k-1}^n).$$

Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení krivky Γ vytvorená delením d_n pomocou parametrického vyjadrenia, t. j. $D_n = \{z_0^n, z_1^n, \dots, z_{p_n}^n\}$ a $z_0^n \prec z_1^n \prec \dots \prec z_{p_n}^n$, pričom $z_k^n = z(t_k^n)$, $k = 1, 2, \dots, p_n$.

Nech $\xi_k^n = z(\tau_k^n)$.

Potom ξ_k^n je bod oblúka $\widehat{z_{k-1}^n z_k^n}$, $k = 1, 2, \dots, p_n$ a integrálny súčet prislúchajúcich funkcií $f(z)$, deleniu D_n a výberu bodov $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_{p_n}^n)$ je

$$S(f, D_n, \xi^n) = \sum_{k=1}^{p_n} f(\xi_k^n) (z_k^n - z_{k-1}^n).$$

Dokážeme, že tieto postupnosti integrálnych súčtov sú súčasne konvergentné pre normálne postupnosti delení a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\varphi, d_n, \tau^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n, \xi^n),$$

t. j. že, pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé delenie d intervalu $[\alpha, \beta]$, ktorého norma $v(d) < \delta$ (resp. delenie D krivky Γ , $v(D) < \delta$) a ľubovoľný výber bodov $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p)$ (resp. $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$) platí

$$|S(f, D, \xi) - S(\varphi, d, \tau)| < \varepsilon.$$

Pomocná Lema 6.2.2 nám zaručí, že ak bude aj norma $v(D_n)$ dostatočne malá, bude norma $v(d_n)$ dostatočne malá. Upravíme ľavú stranu poslednej nerovnosti

$$\begin{aligned} |S(f, D, \xi) - S(\varphi, d, \tau)| &= \left| \sum_{k=1}^p f(\xi_k) (z_k - z_{k-1}) - \sum_{k=1}^p f(z(\tau_k)) z'(\tau_k) (t_k - t_{k-1}) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^p |f(\xi_k)| |z_k - z_{k-1} - z'(\tau_k) (t_k - t_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^p M |z(t_k) - z(t_{k-1}) - z'(\tau_k) (t_k - t_{k-1})|, \end{aligned} \quad (6.1)$$

kde $M > |f(z)|$ na krivke Γ . Nakoľko predpokladáme hladkosť krivky Γ sú na $[\alpha, \beta]$ spojité a spojitó diferencovateľné aj funkcie $x(t)$ a $y(t)$ z jej parametrického vyjadrenia $z(t) = x(t) + jy(t)$. Pre k -tý sčítanec v poslednej sume preto platí odhad

$$\begin{aligned} |z(t_k) - z(t_{k-1}) - z'(\tau_k) (t_k - t_{k-1})| &= |x(t_k) + jy(t_k) - (x(t_{k-1}) + jy(t_{k-1})) \\ &\quad - (x'(\tau_k) + jy'(\tau_k)) (t_k - t_{k-1})| \\ &= |x(t_k) - x(t_{k-1}) - x'(\tau_k) (t_k - t_{k-1}) \\ &\quad + j(y(t_k) - y(t_{k-1}) - y'(\tau_k) (t_k - t_{k-1}))|. \end{aligned}$$

Na obe funkcie $x(t), y(t)$ môžeme použiť na intervale $[t_{k-1}, t_k]$ Lagrangeovu vetu, podľa ktorej na tomto intervale existujú čísla η_k, ϑ_k také, že platí

$$\begin{aligned} x(t_k) - x(t_{k-1}) &= x'(\eta_k) (t_k - t_{k-1}), \\ y(t_k) - y(t_{k-1}) &= y'(\vartheta_k) (t_k - t_{k-1}). \end{aligned}$$

Odkiaľ pre k -tý sčítanec po úprave dostávame

$$\begin{aligned} |z(t_k) - z(t_{k-1}) - z'(\tau_k) (t_k - t_{k-1})| &= |(x'(\eta_k) - x'(\tau_k) + j(y'(\vartheta_k) - y'(\tau_k))) (t_k - t_{k-1})| \\ &\leq (|x'(\eta_k) - x'(\tau_k)| + |y'(\vartheta_k) - y'(\tau_k)|) \\ &\quad \cdot (t_k - t_{k-1}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Funkcie $x'(t), y'(t)$ sú spojité na $[\alpha, \beta]$, odkiaľ vyplýva, že sú rovnomerne spojité na $[\alpha, \beta]$, a teda platí, že $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta > 0$ také, že $\forall t', t'' \in [\alpha, \beta]$, kde $|t' - t''| < \delta$ platí

$$|x'(t') - x'(t'')| < \varepsilon_1 \quad \wedge \quad |y'(t') - y'(t'')| < \varepsilon_1.$$

Položíme $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M(\beta-\alpha)}$, kde $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. K nemu existuje $\delta > 0$ také, že pre delenie d intervalu $[\alpha, \beta]$, ktorého norma $v(d) < \delta$, platí

$$|\eta_k - \tau_k| \leq |t_k - t_{k-1}| < \delta \quad \wedge \quad |\vartheta_k - \tau_k| \leq |t_k - t_{k-1}| < \delta.$$

A potom zo vzťahu (6.1) pomocou (6.2) platí

$$|S(f, D, \xi) - S(\varphi, d, \tau)| \leq M \sum_{k=1}^p \left(\frac{\varepsilon}{2M(\beta-\alpha)} + \frac{\varepsilon}{2M(\beta-\alpha)} \right) = \varepsilon.$$

Tým sme dokázali platnosť pre hladkú krivku, v prípade po častiach hladkej krivky, ju rozdelíme na po častiach hladké oblúky a použijeme Vetu 6.2.1. ■

Vieme, že krivka môže mať viacero parametrizácií. Práve dokázaná Veta 6.2.3 nám zaručuje nezávislosť hodnoty integrálu od parametrizácie krivky. Konkrétne hovorí, že funkcia $f(z)$ je integrovateľná na Γ práve vtedy, keď je integrovateľná $f(z(t))z'(t)$ na $[\alpha, \beta]$. Pre výpočty nám bude stačiť predpokladať spojitost a previesť krivkový integrál na určitý integrál, o čom hovorí jej nasledujúci dôsledok.

Dôsledok 6.2.4 — Výpočet integrálu funkcie komplexnej premennej. Nech funkcia $f(z)$: $\mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ je spojitá v oblasti $\Omega \subset D_f$.

Nech Γ je jednoduchá, orientovaná, po častiach hladká krivka s parametrickým vyjadrením

$$z = z(t) = x(t) + jy(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

ktorá celá leží v oblasti Ω .

Potom platí

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \pm \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt,$$

kde znamienko znamená kladnú (súhlasnú), alebo zápornú (nesúhlasnú) orientáciu krivky Γ so svojím parametrickým vyjadrením.

Dôkaz. Krivkový integrál si môžeme prepísať podobne ako pri dôkaze Cauchyho-Riemannovej formuly nasledujúcim spôsobom

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + j \int_{\Gamma} (v(x, y) dx + u(x, y) dy).$$

Využitím parametrické vyjadrenie krivky Γ a vlastnosti krivkového integrálu reálnej premennej dostávame

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} (u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)) dt \\ &\quad + j \int_{\alpha}^{\beta} (v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (u(x(t), y(t)) + jv(x(t), y(t))) (x'(t) + jy'(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \end{aligned}$$

A to je to, čo sme mali dokázať, samozrejme s ohľadom na orientáciu krivky. ■

Uvedieme nasledujúce tri užitočné tvrdenia.

Propozícia 6.2.5 Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá na jednoduchej, orientovanej, po častiach hladkej krivke s parametrickým vyjadrením $\Gamma : z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$, a nech $|f(z)| \leq M$ pre všetky body $z \in \Gamma$.

Potom platí

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \cdot \|\Gamma\| = M \cdot L,$$

kde $L = \|\Gamma\|$ je dĺžka krivky Γ .

Dôkaz. Pripomeňme, že integrál z absolútnej hodnoty derivácie parametrizácie krivky je dĺžka príslušnej krivky, t. j.

$$\int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \|\Gamma\| = L.$$

Potom platí

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))| \cdot |z'(t)| dt \leq \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt = M \cdot L.$$

■

Nasledujúce tvrdenie je zovšeobecnením faktu reálnej premennej o derivácii integrálu podľa hornej medze.

Propozícia 6.2.6 Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá v bode $z \in \mathbb{C}$.

Potom platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{(z, z+h)} f(z) dz = f(z).$$

Dôkaz. Symbol $(z, z+h)$ predstavuje úsečku so začiatočným bodom z a koncovým bodom $z+h$, ktorej parametrizácia je napr.

$$z(t) = z + th, \quad t \in [0, 1].$$

Uvažujme rozdiel

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_{(z, z+h)} f(w) dw - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{(z, z+h)} f(z+th) h dt - f(z) \right| = \left| \int_0^1 (f(z+th) - f(z)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(z+th) - f(z)| dt. \end{aligned}$$

Nakoľko je $f(z)$ spojitá v bode z , platí pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$

$$|f(z+th) - f(z)| < \varepsilon,$$

pokiaľ je $|h| \rightarrow 0$ dostávame

$$\left| \frac{1}{h} \int_{(z, z+h)} f(w) dw - f(z) \right| < \int_0^1 \varepsilon dt = \varepsilon,$$

čo pri ľubovoľnej voľbe ε implikuje dokazované tvrdenie. ■

Posledné tvrdenie umožní za istých okolností zámenu poradia integrácie a limitného prechodu.

Propozícia 6.2.7 Nech Γ je jednoduchá, orientovaná, po častiach hladká krivka a nech funkcie $S_n(z)$ a $S(z)$ sú spojité funkcie také, že $S_n(z)$ konverguje na Γ rovnomerne k $S(z)$, t. j.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Gamma} |S_n(z) - S(z)| = 0.$$

Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} S_n(z) dz = \int_{\Gamma} S(z) dz.$$

Dôkaz. Odhadneme rozdiel

$$\left| \int_{\Gamma} S_n(z) dz - \int_{\Gamma} S(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma} (S_n(z) - S(z)) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |S_n(z) - S(z)| dz.$$

Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ dostaneme z predpokladu o rovnomernej konvergentnosti index n_0 taký, že pre všetky $n > n_0$ platí

$$\sup_{z \in \Gamma} |S_n(z) - S(z)| = \varepsilon.$$

Použitím Propozície 6.2.5 tak máme

$$\left| \int_{\Gamma} S_n(z) dz - \int_{\Gamma} S(z) dz \right| \leq \varepsilon \|\Gamma\| = \varepsilon \cdot L,$$

kde $L = \|\Gamma\|$ je dĺžka krivky Γ . Vzhľadom na ľubovoľnosť $\varepsilon > 0$ máme

$$\left| \int_{\Gamma} S_n(z) dz - \int_{\Gamma} S(z) dz \right| = 0,$$

odkiaľ vyplýva dokazované tvrdenie. ■

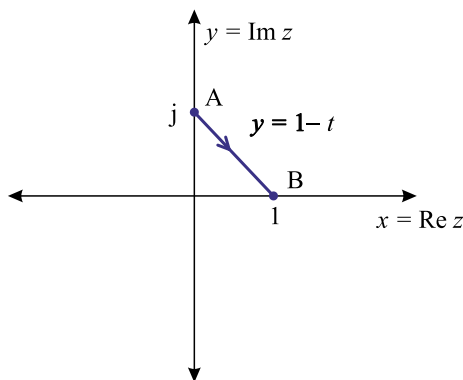
■ **Príklad 6.3** Vypočítajme integrál komplexnej funkcie

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz,$$

kde krivka Γ je úsečka so začiatočným bodom j a koncovým bodom 1.

Parametrizujeme úsečku, a to pomocou jej smerového vektora $\overrightarrow{AB}$ a jej začiatočného bodu A

$$\begin{aligned} A &= 0 + j = (0, 1), \\ B &= 1 + j \cdot 0 = (1, 0), \\ \overrightarrow{AB} &= B - A = (1 - 0, 0 - 1) = (1, -1). \end{aligned}$$

Obr. 6.2.1: Krivka Γ z Príkladu 6.3

Tým dostávame parametrické vyjadrenie úsečky (pri tomto spôsobe parametrizácie úsečky bude patriť parameter t vždy do intervalu $[0, 1]$)

$$\begin{aligned}x(t) &= 0 + 1 \cdot t = t, \\y(t) &= 1 - 1 \cdot t = 1 - t, \quad t \in [0, 1].\end{aligned}$$

Parametrizované vyjadrenie krivky Γ a jej derivácie je

$$\begin{aligned}z(t) &= x + jy = t + j(1 - t), \\z'(t) &= 1 - j.\end{aligned}$$

Dosadíme do integrálu a tento následne vypočítame

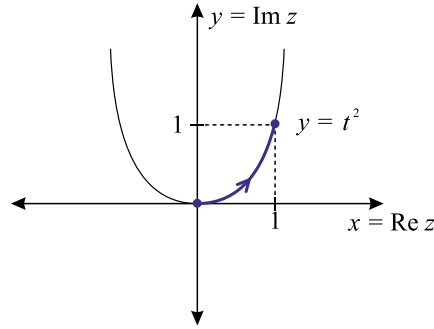
$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz &= \int_0^1 \frac{1}{t + j(1 - t)} (1 - j) dt = \int_0^1 \frac{(1 - j)}{t + j(1 - t)} \frac{t - j(1 - t)}{t - j(1 - t)} dt \\&= \int_0^1 \frac{t - j + tj - tj - 1 + t}{t^2 - tj + t^2j + tj + 1 - t - t^2j - t + t^2} dt \\&= \int_0^1 \frac{2t - 1 - j}{2t^2 - 2t + 1} dt = \int_0^1 \frac{2t - 1}{2t^2 - 2t + 1} dt - j \int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} dt \\&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{4t - 2}{2t^2 - 2t + 1} dt - j \int_0^1 \frac{2}{2 \cdot (2t^2 - 2t + 1)} dt \\&= \frac{1}{2} [\ln |2t^2 - 2t + 1|]_0^1 - j \int_0^1 \frac{2}{\underbrace{4t^2 - 4t + 1}_{(2t-1)^2} + 1} dt \\&= \frac{1}{2} (\ln |2 - 2 + 1| - \ln |1|) - j [\arctan(2t - 1)]_0^1 \\&= \frac{1}{2} (0 - 0) - j (\arctan 1 - \arctan(-1)) = -j \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = -\frac{\pi}{2} j.\end{aligned}$$

■

■ **Príklad 6.4** Vypočítajme integrál komplexnej funkcie

$$\int_{\Gamma} (1 + j - 2\bar{z}) dz,$$

kde Γ je časť paraboly $y = x^2$ so začiatočným bodom $z_1 = 0$ a koncovým bodom $z_2 = 1 + j$.



Obr. 6.2.2: Krivka Γ z Príkladu 6.4

Oblúk paraboly má parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \\ y(t) &= t^2, \quad t \in [0, 1], \\ z(t) &= t + jt^2, \\ \bar{z}(t) &= t - jt^2, \\ z'(t) &= 1 + 2jt. \end{aligned}$$

A pre integrál platí

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (1 + j - 2\bar{z}) dz &= \int_0^1 (1 + j - 2t + 2jt^2) (1 + 2jt) dt \\ &= \int_0^1 (1 + j - 2t + 2jt^2 + 2jt - 2t - 4t^2 - 4t^2) dt = -2 + \frac{4}{3}j. \end{aligned}$$

■

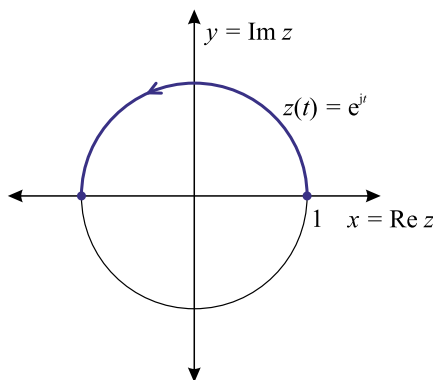
■ **Príklad 6.5** Vypočítajme integrál komplexnej funkcie

$$\int_{\Gamma} (z^2 + z \cdot \bar{z}) dz,$$

kde krivka Γ je oblúk kružnice $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$, orientovanej kladne.

Parametrizácia oblúka Γ je nasledujúca

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + jy(t) = \cos t + j \sin t = e^{jt}, \\ \bar{z}(t) &= x(t) - jy(t) = \cos t - j \sin t = e^{-jt}, \\ z'(t) &= je^{jt}, \end{aligned}$$

Obr. 6.2.3: Krivka Γ z Príkladu 6.5

čo po dosadení do integrálu pre $t \in [0, \pi]$ dáva

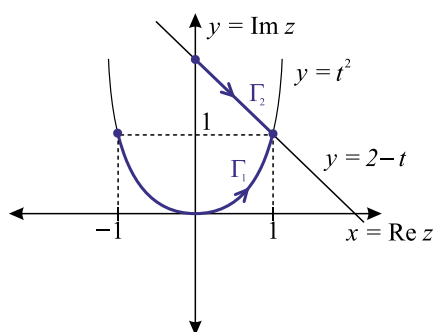
$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} (z^2 + z \cdot \bar{z}) dz &= \int_0^{\pi} (e^{2jt} + e^{jt} \cdot e^{-jt}) j e^{jt} dt = j \int_0^{\pi} (e^{3jt} + e^{jt}) dt = j \left[\frac{e^{3jt}}{3j} + \frac{e^{jt}}{j} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{3} e^{3j\pi} + e^{j\pi} - \underbrace{\left(\frac{1}{3} e^0 + e^0 \right)}_{4/3} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\underbrace{\cos 3\pi}_{-1} + j \underbrace{\sin 3\pi}_0 \right) + \left(\underbrace{\cos \pi}_{-1} + j \underbrace{\sin \pi}_0 \right) - \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 6.6** Vypočítajme integrál komplexnej funkcie

$$\int_{\Gamma} z \cdot \operatorname{Im} z dz,$$

kde krivka Γ sa skladá z krivky Γ_1 , čo je časť paraboly $y = x^2$, kde $x \in [-1, 1]$ a krivky Γ_2 , čo je časť priamky $y = 2 - x$, kde $x \in [0, 1]$.

Obr. 6.2.4: Krivka Γ z Príkladu 6.6

Integrál rozdelíme na súčet dvoch

$$\int_{\Gamma} z \cdot \operatorname{Im} z dz = \int_{\Gamma_1} z \cdot \operatorname{Im} z dz + \int_{\Gamma_2} z \cdot \operatorname{Im} z dz.$$

Prvú krivku Γ_1 parametrizujeme

$$\begin{aligned}x(t) &= t, \\y(t) &= t^2, \quad t \in [-1, 1], \\z(t) &= t + j t^2, \\ \operatorname{Im} z(t) &= t^2, \\z'(t) &= 1 + 2j t.\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_1} z \cdot \operatorname{Im} z \, dz = \int_{-1}^1 (t + j t^2) \cdot t^2 \cdot (1 + 2j t) \, dt = \int_{-1}^1 (-2t^5 + 3j t^4 + t^3) \, dt = \frac{6}{5}j.$$

Krivku Γ_2 takisto parametrizujeme

$$\begin{aligned}x(t) &= t, \\y(t) &= 2 - t, \quad t \in [0, 1], \\z(t) &= t + j(2 - t), \\ \operatorname{Im} z(t) &= 2 - t, \\z'(t) &= 1 - j.\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_2} z \cdot \operatorname{Im} z \, dz = \int_0^1 (t + j(2 - t)) \cdot (2 - t) \cdot (1 - j) \, dt = 3 + \frac{5}{3}j.$$

Výsledok je

$$\int_{\Gamma} z \cdot \operatorname{Im} z \, dz = \int_{\Gamma_1} z \cdot \operatorname{Im} z \, dz + \int_{\Gamma_2} z \cdot \operatorname{Im} z \, dz = \frac{6}{5}j + 3 + \frac{5}{3}j = 3 + \frac{43}{15}j.$$

■

Ďalší príklad má kardinálny význam pre tvrdenia nasledujúcej podkapitoly.

■ **Príklad 6.7** Vypočítajme integrál funkcie komplexnej premennej

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz,$$

kde krivka Γ je kružnica $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Parametrizáciu kružnice sme si ukázali v Príklade 6.2, pozrime sa ešte raz na problematiku všeobecnejšie. Opäť použijeme polárnu transformáciu a pre komplexnú premennú dostávame

$$z(t) = \rho \cos t + j \cdot \rho \sin t = \rho e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

V tomto prípade máme kružnicu $|z - z_0| = \rho$, a teda stred kružnice Γ nie je v bode $(0, 0)$ ale je v bode $z_0 = x_0 + jy_0$, a preto

$$z(t) = z_0 + \rho e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Derivácia parametrického vyjadrenia kružnice Γ bude

$$z'(t) = j\rho e^{jt}.$$

Pristúpime k samotnému výpočtu integrálu

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-z_0)\rho^n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(z_0 + \rho e^{jt} - z_0)^n} j\rho e^{jt} dt = \int_0^{2\pi} \frac{j\rho e^{jt}}{\rho^n e^{jnt}} dt = \frac{j}{\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-j(n-1)t} dt.$$

Pozrime sa na prípad $n > 1, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-z_0)^n} dz &= \frac{j}{\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-j(n-1)t} dt = \frac{j}{\rho^{n-1}} \left[\frac{-e^{-j(n-1)t}}{j(n-1)} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{-1}{\rho^{n-1}(n-1)} [\cos(n-1)t - j \sin(n-1)t]_0^{2\pi} \\ &= \frac{-1}{\rho^{n-1}(n-1)} (1 - j \cdot 0 - (1 - j \cdot 0)) = 0. \end{aligned}$$

Naproti tomu, v prípade $n = 1$, je integrál nenulový

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = j \int_0^{2\pi} e^0 dt = j \int_0^{2\pi} dt = j [t]_0^{2\pi} = 2\pi j.$$

■

6.3 Cauchyho fundamentálna veta

Nasledujúca veta má zásadný význam v celej analýze komplexnej premennej, preto ju často nazývame fundamentálnou vetou teórie komplexnej premennej.

Veta 6.3.1 — Cauchyho fundamentálna veta. Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná funkcia v jednoducho súvislej oblasti $\Omega \subset D_f$.

Nech krivka Γ je jednoduchá, uzavretá, orientovaná (kladne alebo záporne), po častiach hladká krivka, ktorá leží aj so svojím vnútrom vo vnútri oblasti Ω .

Potom platí

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Dôkaz. Ak predpokladáme holomorfnoť funkcie $f(z)$, potom jej parciálne derivácie sú spojité funkcie a dôkaz môžeme vykonať ako priamy dôsledok Greenovej vety a skutočnosti, že reálna a imaginárna zložka funkcie $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ vyhovujú Cauchyho-Riemannovým rovniciam vo vnútri krivky Γ , a dokonca aj v oblasti Ω .

Rozpíšeme si integrovanú funkciu f a aj diferenciál dz na reálnu a imaginárnu zložku

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + jv(x, y), \\ dz &= dx + j dy. \end{aligned}$$

Po dosadení do integrálu dostávame

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} (u + jv)(dx + j dy) = \oint_{\Gamma} (u dx - v dy) + j \oint_{\Gamma} (v dx + u dy).$$

Podľa Greenovej vety, môžeme integrál po uzavretej krivke Γ nahradiť plošným integrálom v oblasti ohraničenej touto krivkou, t. j. $\text{int } \Gamma$, a to nasledujúco

$$\oint_{\Gamma} (u dx - v dy) = \iint_{\text{int } \Gamma} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$\oint_{\Gamma} (v dx + u dy) = \iint_{\text{int } \Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

A tak ako sme spomínali, keďže sú funkcie u a v reálna a imaginárna zložka holomorfnej funkcie v oblasti Ω , platia tu pre ne Cauchyho-Riemannove rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Preto sú oba plošné integrály rovné nule a celkovo platí, že

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

■

R Opačné tvrdenie, teda, že z nulovosti integrálov po ľubovoľnej uzavretej krivke v jednoducho súvislej oblasti vyplýva holomorfnosť funkcie v tejto oblasti, sa nazýva *Moreroova veta*.

■ **Príklad 6.8** Vypočítajme

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{7z} \cos z}{1+z^2} dz,$$

kde krivka Γ je kružnica $\Gamma: |z - 2 - j| = 1$.

Funkcia

$$f(z) = \frac{e^{7z} \cos z}{1+z^2}$$

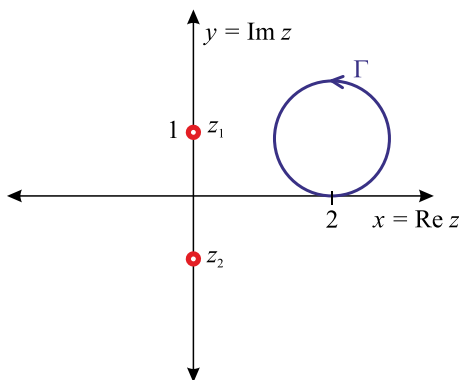
je holomorfnou funkciou na celej Gaussovej rovine $\mathbb{C}$, s výnimkou prípadu, kedy je menovateľ rovný nule, t. j.

$$1+z^2=0, \quad \Leftrightarrow \quad z_{1,2} = \pm j.$$

Keďže však ani jeden z týchto singulárnych bodov nepatrí do vnútra kružnice $\Gamma: |z - 2 - j| = 1$, je vnútro krivky Γ podoblastou holomorfnej oblasti a pre integrál platí

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{7z} \cos z}{1+z^2} dz = 0.$$

■

Obr. 6.3.1: Krivka Γ z Příkladu 6.8

6.4 Dôsledky Cauchyho fundamentálnej vety

Tak ako má Cauchyho fundamentálna veta kľúčový význam v celej komplexnej premennej, budú nám jej dôsledky jasne ukazovať podstatný rozdiel medzi analýzou komplexnej a reálnej premennej.

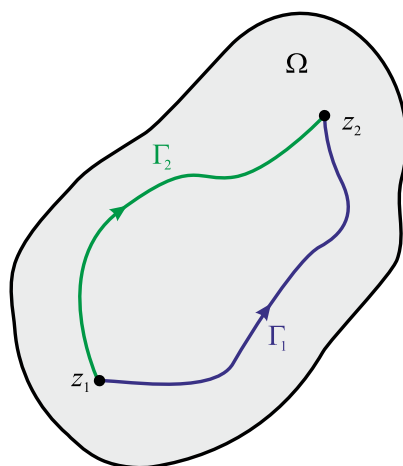
Dôsledok 6.4.1 — Nezávislosť od integračnej cesty. Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná funkcia v jednoducho súvislej oblasti $\Omega \subset D_f$.

Nech $z_1, z_2 \in \Omega$, $z_1 \neq z_2$, sú dva ľubovoľné rôzne body ležiace v oblasti Ω , kde z_1 je začiatkový a z_2 je koncový bod dvoch ľubovoľných po častiach hladkých kriviek Γ_1, Γ_2 ležiacich vo vnútri oblasti Ω .

Potom platí

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

To znamená, že hodnota integrálu nezávisí od integračnej cesty, ale iba od jej začiatočného a koncového bodu.



Obr. 6.4.1: Nezávislosť od integračnej cesty

Dôkaz. Krivka $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2^*$ je po častiach hladká a uzavretá krivka, ktorá celá leží vo vnútri oblasti Ω , čím sú splnené predpoklady Cauchyho fundamentálnej vety 6.3.1, preto s použitím vlastností z Vety 6.2.1

platí

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2^*} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Odkiaľ priamo vyplýva dokazované tvrdenie

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

■

Tento dôsledok neplatí, ak oblasť nie je jednoducho súvislá. Napr. funkcia $f(z) = 1/z$ a krivky začínajúce v bode $z_1 = -1$ a končiac v bode $z_2 = 1$, ktoré neprechádzajú jediným singulárnym bodom $z_0 = 0$ funkcie $1/z$, ale ho obchádzajú, t. j. pre polkružnice

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &: z = e^{jt}, & t \in [-\pi, 0], \\ \Gamma_2 &: z = e^{-jt}, & t \in [-\pi, 0]. \end{aligned}$$

majú príslušné integrály rôzne výsledky

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z} &= \int_{-\pi}^0 \frac{j e^{jt}}{e^{jt}} dt = j [t]_{-\pi}^0 = j\pi, \\ \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} &= \int_{-\pi}^0 \frac{-j e^{jt}}{e^{jt}} dt = -j [t]_{-\pi}^0 = -j\pi. \end{aligned}$$

Funkcia $f(z)$ nie je holomorfná v jednoducho súvislej oblasti, ale každá oblasť, kde je holomorfná a ležia tam krivky Γ_1 a Γ_2 , je dvojsúvislá.

Dôsledok 6.4.2 — Princíp deformácie krivky. Nech Γ_1, Γ_2 sú uzavreté, súhlasne (obe kladne alebo obe záporne) orientované, po častiach hladké krivky a $\Gamma_2 \subset \text{int } \Gamma_1$.

Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná na oblasti $\Omega = \text{int } \Gamma_1 \cap \text{ext } \Gamma_2$ a spojitá na uzávere $\bar{\Omega}$.

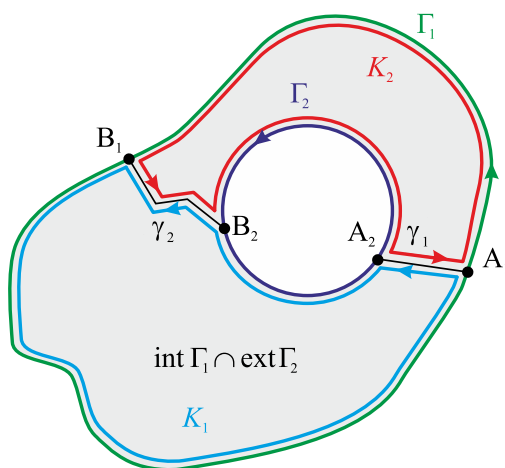
Potom platí

$$\oint_{\Gamma_1} f(z) dz = \oint_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme pre prípad, že sú obe krivky orientované kladne, opačne je postup analogický.

Na oboch krivkách zvolíme dva rôzne body. Na vonkajšej krivke Γ_1 volíme body $A_1 \neq B_1$ a na vnútornej krivke Γ_2 volíme body $A_2 \neq B_2$. Body A_1, A_2 spojíme orientovanou lomenou čiarou γ_1 , body B_1, B_2 spojíme orientovanou lomenou čiarou γ_2 tak, aby sa tieto nepretínali a celé ležali v oblasti $\text{int } \Gamma_1 \cap \text{ext } \Gamma_2$. Týmto spôsobom sme vytvorili dve uzavreté cyklicky orientované krivky

$$\begin{aligned} K_1 &= \widehat{A_1 B_1} \oplus \gamma_2 \oplus \widehat{A_2 B_2}^* \oplus \gamma_1^*, \\ K_2 &= \gamma_1 \oplus \widehat{B_2 A_2}^* \oplus \gamma_2^* \oplus \widehat{B_1 A_1}, \end{aligned}$$



Obr. 6.4.2: Princíp deformácie krivky

ktoré sú po častiach hladké a uzavreté. Pre každú z týchto kriviek vieme nájsť podoblast holomorfnej oblasti, ktoré ju celú obsahujú. Preto podľa Cauchyho fundamentálnej vety 6.3.I, platí

$$\int_{K_1} f(z) dz = 0, \quad \int_{K_2} f(z) dz = 0,$$

alebo

$$\int_{K_1} f(z) dz + \int_{K_2} f(z) dz = 0. \quad (6.3)$$

Okrem toho zrejme platí

$$\begin{aligned} \int_{K_1} f(z) dz &= \int_{\widehat{A_1 B_1}} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\widehat{A_2 B_2}} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz, \\ \int_{K_2} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\widehat{B_2 A_2}} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\widehat{A_1 B_1}} f(z) dz. \end{aligned}$$

Sčítaním posledných dvoch rovností a vzhľadom na (6.3) bude platiť

$$\int_{\widehat{A_1 B_1}} f(z) dz + \int_{\widehat{B_1 A_1}} f(z) dz - \int_{\widehat{A_2 B_2}} f(z) dz - \int_{\widehat{B_2 A_2}} f(z) dz = 0,$$

odkiaľ dostávame

$$\oint_{\Gamma_1} f(z) dz - \oint_{\Gamma_2} f(z) dz = 0,$$

čo priamo implikuje dokazované tvrdenie. ■



Ak sú splnené predpoklady vety, môžeme ľubovoľnú uzavretú integračnú cestu nahradiť oveľa jednoduchšou rovnako orientovanou uzavretou krivkou, napríklad kružnicou.

Dôsledok 6.4.3 — Superpozícia princípu deformácie krivky. Nech $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ sú jednoduché, uzavreté, súhlasne orientované, po častiach hladké krivky.

Nech krivky $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ ležia vo vnútri krivky Γ , pričom nemajú spoločný žiaden bod.

Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná na oblasti $\Omega = \text{int}\Gamma \cap \text{ext}\Gamma_1 \cap \dots \cap \text{ext}\Gamma_n$ a spojitá na uzávere $\bar{\Omega}$.

Potom platí

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma_1} f(z) dz + \oint_{\Gamma_2} f(z) dz + \dots + \oint_{\Gamma_n} f(z) dz.$$

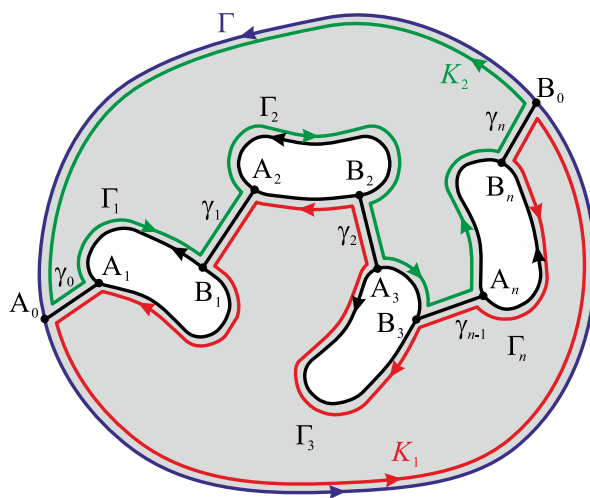
Dôkaz. Tvrdenie dokážeme pre prípad, že sú všetky krivky orientované kladne, opačne je postup analogický.

Na všetkých krivkách zvolíme dva rôzne body $A_i \neq B_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, a to nasledujúcim spôsobom, na krivke Γ to budú body $A_0 \neq B_0$, na krivke Γ_1 to budú body $A_1 \neq B_1$, a takýmto spôsobom až po body $A_n \neq B_n$ na krivke Γ_n . Takto sme si vytvorili „premostenia“ medzi jednotlivými krivkami $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ ako aj medzi samotnou krivkou Γ orientovanú lomenú čiaru medzi bodmi A_0, B_1, γ_i orientovanú lomenú čiaru medzi bodmi A_i, B_{i+1} , pre $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ a nakoniec γ_n orientovanú lomenú čiaru medzi bodmi B_n, B_0 .

Tieto „premostenia“ sa nepretínajú a celé ležia v oblasti $\Omega = \text{int}\Gamma \cap \text{ext}(\cup_{i=1}^n \Gamma_i)$.

Týmto spôsobom sme vytvorili dve krivky

$$\begin{aligned} K_1 &= \widehat{A_0 B_0} \oplus \gamma_n^* \oplus \widehat{A_n B_n}^* \oplus \gamma_{n-1}^* \oplus \dots \oplus \gamma_2^* \oplus \widehat{A_2 B_2}^* \oplus \gamma_1^* \oplus \widehat{A_1 B_1}^* \oplus \gamma_0^*, \\ K_2 &= \widehat{B_0 A_0} \oplus \gamma_0 \oplus \widehat{B_1 A_1}^* \oplus \gamma_1 \oplus \widehat{B_2 A_2}^* \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_{n-1} \oplus \widehat{B_n A_n}^* \oplus \gamma_n, \end{aligned}$$



Obr. 6.4.3: K dôkazu Dôsledku 6.4.3

ktoré sú po častiach hladké a uzavreté. Pre každú z týchto kriviek vieme nájsť podoblasti holomorfné oblasti, ktoré ju celú obsahujú, zrejme v oblasti $\text{int}\Gamma \cap \text{ext}(\cup_{i=1}^n \Gamma_i)$. Preto opäť použitím Cauchyho fundamentálnej vety 6.3.1, platí

$$\int_{K_1} f(z) dz = 0, \quad \int_{K_2} f(z) dz = 0,$$

resp.

$$\int_{K_1} f(z) dz + \int_{K_2} f(z) dz = 0. \tag{6.4}$$

A takisto môžeme písať

$$\begin{aligned} \int_{K_1} f(z) dz &= \int_{\widehat{A_0 B_0}} f(z) dz - \int_{\gamma_n} f(z) dz - \int_{\widehat{A_n B_n}} f(z) dz - \int_{\gamma_{n-1}} f(z) dz - \dots \\ &\quad - \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\widehat{A_2 B_2}} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\widehat{A_1 B_1}} f(z) dz - \int_{\gamma_0} f(z) dz, \end{aligned}$$

ako aj

$$\begin{aligned} \int_{K_2} f(z) dz &= \int_{\widehat{B_0 A_0}} f(z) dz + \int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\widehat{B_1 A_1}} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\widehat{B_2 A_2}} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz - \dots \\ &\quad + \int_{\gamma_{n-1}} f(z) dz - \int_{\widehat{B_n A_n}} f(z) dz + \int_{\gamma_n} f(z) dz. \end{aligned}$$

Ich sčítaním a vzhľadom na (6.4) platí

$$\int_{\widehat{A_0 B_0}} f(z) dz + \int_{\widehat{B_0 A_0}} f(z) dz - \int_{\widehat{A_1 B_1}} f(z) dz - \int_{\widehat{B_1 A_1}} f(z) dz - \dots - \int_{\widehat{A_n B_n}} f(z) dz - \int_{\widehat{B_n A_n}} f(z) dz = 0,$$

alebo aj

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz - \oint_{\Gamma_1} f(z) dz - \oint_{\Gamma_2} f(z) dz - \dots - \oint_{\Gamma_n} f(z) dz = 0,$$

odkiaľ dostávame dokazované tvrdenie. ■

6.5 Cauchyho integrálny vzorec (formula)

Vyústením predošlých myšlienkových postupov je zásadná veta integrálneho počtu komplexnej premennej.

Veta 6.5.1 — Cauchyho integrálny vzorec. Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná funkcia v oblasti $\Omega \subset D_f$.

Nech krivka Γ je uzavretá, orientovaná (kladne alebo záporne), po častiach hladká krivka, ktorá leží aj so svojím vnútrom vo vnútri oblasti Ω .

Nech bod z_0 leží vo vnútri krivky Γ .

Potom platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Dôkaz. Predpokladajme, že podľa Dôsledku 6.4.2 o princípe deformácie krivky krivku Γ nahradíme v oblasti Ω kružnicou $\Gamma_0 : |z - z_0| = \rho$, t. j. $z(t) = z_0 + \rho e^{jt} \Rightarrow z'(t) = j\rho e^{jt}$, a teda bude platiť

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_{\Gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\Gamma_0} \frac{f(z_0) + (f(z) - f(z_0))}{z - z_0} dz \\ &= f(z_0) \oint_{\Gamma_0} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{\Gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \end{aligned}$$

Podľa Príkladu 6.7 platí pre ľubovoľnú kružnicu so stredom v bode z_0

$$\oint_{\Gamma_0} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi j.$$

A teda platí

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) 2\pi j + \oint_{\Gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Integrál na pravej strane rovnosti odhadneme. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Podľa predpokladu Vety je funkcia $f(z)$ na Ω holomorfná, a teda aj spojitá v bode z_0 . A potom musí k $\varepsilon > 0$ existovať $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in \Omega$, pre ktoré $|z - z_0| < \delta$, platí $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Preto ak $\rho < \delta$, tak pre každý bod $z \in \Gamma_0$ platí $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ a $|z - z_0| < \rho$. Potom platí

$$\left| \oint_{\Gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} \oint_{\Gamma_0} dz = \frac{\varepsilon}{\rho} \|\Gamma_0\| = \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

Tento odhad platí pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, a preto musí byť

$$\oint_{\Gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0,$$

odkiaľ priamo vyplýva tvrdenie dokazovanej Vety. ■

R Cauchyho integrálny vzorec používame na výpočet integrálov typu

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi j \cdot f(z_0),$$

pričom požadujeme holomorfnosť funkcie $f(z)$ vo vnútri krivky Γ , nie v bode z_0 .

■ **Príklad 6.9** Vypočítajme

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z(z^2 - 1)} dz,$$

kde Γ je kladne orientovaná kružnica $\Gamma: |z - 1| = \frac{1}{2}$.

Funkcia $\frac{1}{z(z^2 - 1)}$ je holomorfnou funkciou všade okrem bodov $z(z^2 - 1) = 0$, t. j.

$$z_1 = 0 \notin \text{int}\Gamma,$$

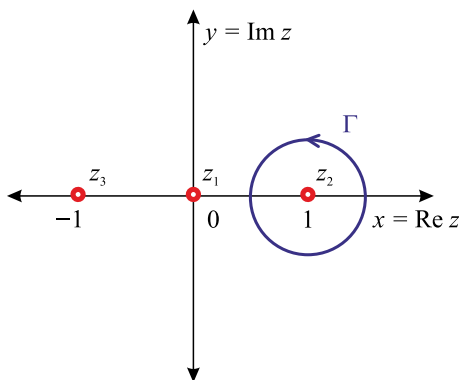
$$z_2 = 1 \in \text{int}\Gamma,$$

$$z_3 = -1 \notin \text{int}\Gamma.$$

Vo vnútri kružnice Γ sa nachádza iba bod z_2 , preto integrál upravíme tak, aby v čitateli bola funkcia $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$, ktorá je holomorfná na oblasti, ktorej podoblastou je $\text{int}\Gamma$ a použijeme Cauchyho integrálny vzorec 6.5.1

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z(z^2 - 1)} dz = \oint_{\Gamma} \frac{1}{z(z+1)(z-1)} dz = \oint_{\Gamma} \frac{\frac{1}{z(z+1)}}{z-1} dz = 2\pi j \left[\frac{1}{z(z+1)} \right]_{z=z_2=1} = \pi j.$$

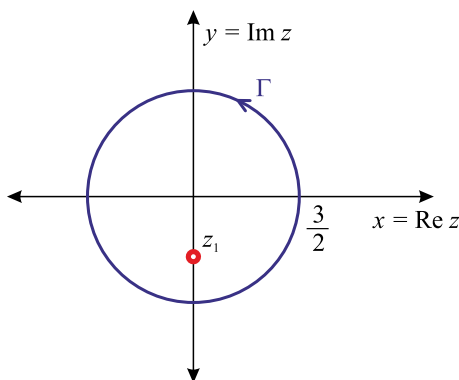
■

Obr. 6.5.1: Krivka Γ z Příkladu 6.9

■ **Příklad 6.10** Vypočítajme

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{z+j} dz,$$

kde Γ je kladne orientovaná kružnica $\Gamma : |z| = \frac{3}{2}$.

Obr. 6.5.2: Krivka Γ z Příkladu 6.10

Funkcia $f(z) = \sin z$ je holomorfnou funkciou na celom $\text{int } \Gamma$ a takisto platí, že $z_1 = -j \in \text{int } \Gamma$. Preto

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{z+j} dz = 2\pi j f(z_1) = 2\pi j \sin(-j) = -2\pi j \cdot j \sinh 1 = 2\pi \sinh 1.$$

■

Cauchyho integrálny vzorec 6.5.1 je možné zovšeobecniť.

Veta 6.5.2 — Zovšeobecnený Cauchyho integrálny vzorec. Nech $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfná funkcia v oblasti $\Omega \subset D_f$.

Nech krivka Γ je uzavretá, orientovaná (kladne alebo záporne), po častiach hladká krivka, ktorá leží aj so svojím vnútrom vo vnútri oblasti Ω .

Nech bod z_0 leží vo vnútri krivky Γ .

Potom má funkcia $f(z)$ v bode deriváciu každého rádu, pre ktorú platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Dôkaz. Ukážeme si, že tvrdenie vety platí pre deriváciu prvého rádu, t. j. dokážeme, že pre $n = 1$ platí

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz.$$

Zvolíme si ľubovoľné, ale potom už fixné číslo $z_0 \in \text{int } \Gamma$ a takisto zvolíme $\delta > 0$ také, že celé δ -okolie bodu z_0 patrí do $\text{int } \Gamma$. Takisto nech $|\Delta z| < \delta$, čiže aj bod $z_0 + \Delta z$ patrí do δ -okolía bodu z_0 . Derivácia funkcie $f(z)$ v bode z_0 je

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

pre hodnoty v čitateli podľa Cauchyho integrálneho vzorca 6.5.1 platí

$$f(z_0 + \Delta z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - (z_0 + \Delta z))} dz,$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Odkiaľ

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi j \Delta z} \oint_{\Gamma} \left(\frac{f(z)}{(z - (z_0 + \Delta z))} - \frac{f(z)}{(z - z_0)} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi j \Delta z} \oint_{\Gamma} \left(\frac{f(z)(z - z_0) - f(z)(z - z_0 - \Delta z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi j \Delta z} \oint_{\Gamma} \left(\frac{f(z)(z - z_0) - f(z)(z - z_0) + f(z)\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi j \Delta z} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz. \end{aligned}$$

Limitným prechodom pre $\Delta z \rightarrow 0$ dostávame

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} \right) dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz. \end{aligned}$$

V predposlednej úprave predchádzajúcej rovnosti sme použili „prechod“ s limitou pod znak integrálu. To je možné, keď platí

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz,$$

resp. práve vtedy, keď

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz - \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) \Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz = 0.$$

Keďže funkcia $f(z)$ je spojitá na Γ , platí $|f(z)| \leq M$ pre všetky body $z \in \Gamma$. Ďalej označme $d = \inf_{z \in \Gamma} |z - z_0|$ vzdialenosť bodu z_0 od krivky Γ , t. j. $|z - z_0| \geq d$. Potom pre každé $z \in \Gamma$ platí

$$|z - z_0 - \Delta z| \geq |z - z_0| - |\Delta z| \geq d - |\Delta z|.$$

Potom

$$\left| \oint_{\Gamma} \frac{f(z) \Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz \right| \leq \frac{M \|\Gamma\| |\Delta z|}{(d - |\Delta z|) d^2} \rightarrow 0, \quad \text{pre } \Delta z \rightarrow 0.$$

Takže vykonaná zámena poradia limity a integrálu bola možná.

Postupnou analógiou by sme dostali vzťahy pre derivácie vyššieho rádu až po samotné tvrdenie vety pre n -tú deriváciu. ■

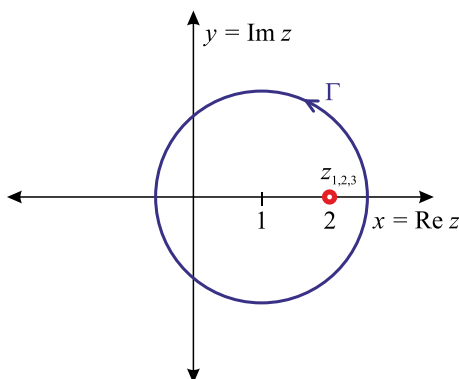
R Zovšeobecnený Cauchyho integrálny vzorec používame na výpočet integrálov typu

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi j}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0).$$

■ **Príklad 6.11** Vypočítajme

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^3 + 3z + 1}{(z - 2)^3} dz,$$

kde Γ je kladne orientovaná kružnica $\Gamma: |z - 1| = \frac{3}{2}$.



Obr. 6.5.3: Krivka Γ z Príkladu 6.11

Funkcia $f(z) = z^3 + 3z + 1$ je holomorfnou funkciou na celom $\mathbb{C}$. Okrem toho singulárny bod integrantu nájdeme z rovnosti pre jeho menovateľ

$$(z - 2)^3 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad z_{1,2,3} = 2 \in \text{int } \Gamma,$$

tento singulárny bod sa nachádza v menovateli integrálu v tretej mocnine, na výpočet integrálu budeme potrebovať preto druhú deriváciu funkcie, $f(z) = z^3 + 3z + 1$, v bode $z_{1,2,3} = 2$

$$f'(z) = 3z^2 + 3,$$

$$f''(z) = 6z|_{z=z_{1,2,3}=2} = 12.$$

Pre daný integrál bude teda platiť

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^3 + 3z + 1}{(z-2)^3} dz = \frac{2\pi j}{2!} f''(2) = \pi j [6z]_{z=z_{1,2,3}=2} = 12\pi j.$$

■

■ **Príklad 6.12** Vypočítajme

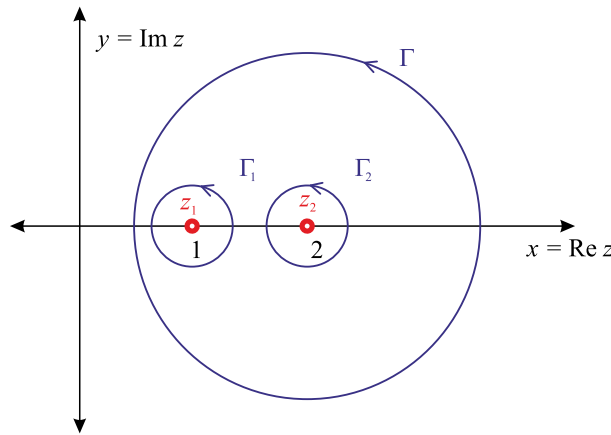
$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} dz,$$

kde Γ je kladne orientovaná kružnica $\Gamma: |z-2| = \frac{3}{2}$.

Funkcia $g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ je holomorfná funkcia okrem bodov $(z-1)(z-2)^2 = 0$, t. j.

$$z_1 = 1 \in \text{int } \Gamma,$$

$$z_{2,3} = 2 \in \text{int } \Gamma.$$



Obr. 6.5.4: Ku Príkladu 6.12

Podľa predpokladov Dôsledku 6.4.3 nahradíme pôvodnú krivku $\Gamma: |z-2| = \frac{3}{2}$ napr. krivkou $\Gamma_1: |z-1| = \frac{1}{4}$, vnútro ktorej je podoblastou oblasti, na ktorej je holomorfná funkcia $f_1(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$, a krivkou $\Gamma_{2,3}: |z-2| = \frac{1}{4}$, vnútro ktorej je podoblastou oblasti, na ktorej je holomorfná funkcia $f_{2,3}(z) = \frac{1}{z-1}$. Potom

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} dz &= \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{(z-2)^2} dz + \oint_{\Gamma_{2,3}} \frac{1}{(z-1)} dz = \frac{2\pi j}{0!} f_1(z_1) + \frac{2\pi j}{1!} f'_{2,3}(z_{2,3}) \\ &= 2\pi j \left[\frac{1}{(z-2)^2} \right]_{z=z_1=1} + 2\pi j \left[\left(\frac{1}{(z-1)} \right)' \right]_{z=z_{2,3}=2} \\ &= 2\pi j \cdot 1 + 2\pi j \left[\frac{-1}{(z-1)^2} \right]_{z=z_{2,3}=2} = 2\pi j + 2\pi j (-1) = 0. \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 6.13** Vypočítajme

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} dz,$$

kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 1 + 2\cos t + j(1 + 2\sin t), t \in [0, 2\pi]\}$.

Parametrické rovnice majú tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + 2\cos t & \Leftrightarrow & (x-1) = 2\cos t, & /()^2 \\ y(t) &= 1 + 2\sin t & \Leftrightarrow & (y-1) = 2\sin t, & /()^2 \end{aligned}$$

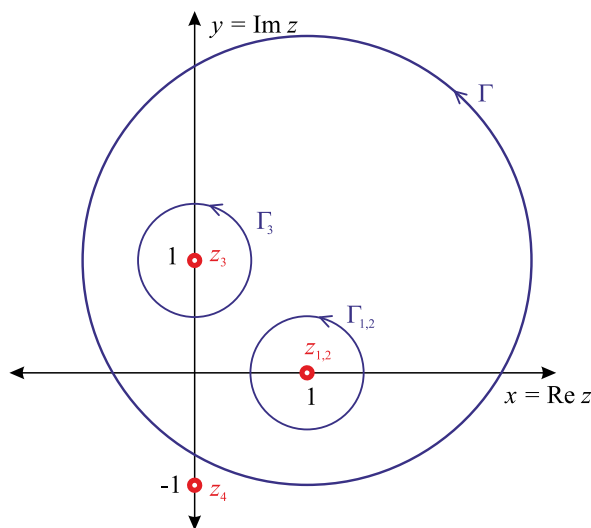
ich umocnením a sčítaním dostávame

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2 \cos^2 t + 2^2 \sin^2 t = 2^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = 2^2,$$

čo je kružnica $\Gamma : |z - 1 - j| = 2$.

Funkcia $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} = \frac{1}{(z-1)^2(z+j)(z-j)}$ je holomorfná na celej komplexnej rovine $\mathbb{C}$ s výnimkou singulárnych bodov $(z-1)^2(z^2+1) = 0$, t. j.

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= 1 \in \text{int}\Gamma, \\ z_3 &= j \in \text{int}\Gamma, \\ z_4 &= -j \notin \text{int}\Gamma & \Leftrightarrow & |-j - 1 - j| = \sqrt{5} > 2 = \rho. \end{aligned}$$



Obr. 6.5.5: Ku Príkladu 6.13

Podobne ako v ostatnom príklade volíme namiesto pôvodnej krivky $\Gamma : |z - 1 - j| = 2$ krivky s ňou zameniteľné (podľa predpokladov Dôsledku 6.4.3), a to napríklad krivku $\Gamma_{1,2} : |z - 1| = \frac{1}{2}$, vnútro ktorej je podoblastou oblasti, na ktorej je holomorfná funkcia $f_{1,2}(z) = \frac{1}{z^2+1}$, a krivku $\Gamma_3 : |z - j| = \frac{1}{2}$, vnútro

ktorej je podoblastou oblasti, na ktorej je holomorfná funkcia $f_3(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+j)}$. Pre integrál preto platí

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} dz &= \oint_{\Gamma_{1,2}} \frac{\frac{1}{z^2+1}}{(z-1)^2} dz + \oint_{\Gamma_3} \frac{\frac{1}{(z-1)^2(z+j)}}{z-j} dz = 2\pi j f'_{1,2}(z_{1,2}) + 2\pi j f_3(z_3) \\
 &= 2\pi j \left[\left(\frac{1}{z^2+1} \right)' \right]_{z=z_{1,2}=1} + 2\pi j \left[\frac{1}{(z-1)^2(z+j)} \right]_{z=z_3=j} \\
 &= 2\pi j \left[\frac{-2z}{(z^2+1)^2} \right]_{z=z_{1,2}=1} + 2\pi j \frac{1}{(j-1)^2(j+j)} \\
 &= 2\pi j \left(\frac{-1}{2} \right) + 2\pi j \frac{1}{4} = -\pi j + \frac{\pi j}{2} = -\frac{\pi j}{2}.
 \end{aligned}$$

R V predchádzajúcich dvoch príkladoch sme podľa tvrdení Dôsledku 6.4.3 nahrádzali krivku Γ dvoma súhlasne orientovanými (navzájom i súhlasne s krivkou Γ), navzájom sa nepretínajúcimi krivkami $\Gamma_{1,2}, \Gamma_3$, ktoré ležia vo vnútri krivky Γ a vo svojom vnútri obsahujú príslušné izolované singulárne body. Okrem týchto podmienok sme od kriviek požadovali, aby boli po častiach hladkými. To znamená, že zvolenými krivkami mohli byť ľubovoľné krivky spĺňajúce dané podmienky (napr. i kružnica s ľubovoľne malým polomerom, t. j. hranica ľubovoľného okolia singulárneho bodu, nakoľko izolované singulárne body neobsahujú vo svojom okolí nijaký iný singulárny bod).

Priamymi dôsledkami zovšeobecneného Cauchyho integrálneho vzorca 6.5.2 sú nasledujúce tvrdenia. Tieto vlastnosti holomorfných funkcií nemajú v reálnom obore žiadnu analógiu.

Dôsledok 6.5.3 Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná funkcia na oblasti $\Omega \subset D_f$. Potom má na Ω všetky derivácie a tieto sú takisto holomorfné funkcie na Ω .

Dôkaz. Priamo vyplýva z Vety 6.5.2. ■

Dôsledok 6.5.4 — Liouvilleova veta. Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná a ohraničená na $\mathbb{C}$. Potom je $f(z)$ konštantná funkcia.

Dôkaz. Podľa predpokladov je funkcia $f(z)$ ohraničená na $\mathbb{C}$, teda existuje $M \geq |f(z)|$ pre všetky body $z \in \mathbb{C}$. Zvolíme ľubovoľné číslo z_0 a opíšeme okolo z_0 kružnicu s polomerom ρ . Podľa Vety 6.5.2 máme

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^2} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho}.$$

Nakoľko ρ môže byť ľubovoľne veľké, dostávame $|f'(z_0)| = 0$, odkiaľ $f'(z_0) = 0$. Keďže z_0 je ľubovoľný bod, je aj $f'(z) = 0$, a teda musí byť $f(z) = \text{konšt.}$ ■

Uvažujme funkciu $\sin z$. Táto je holomorfná na celej množine $\mathbb{C}$ a rozhodne nie je konštantná. Liouvilleova veta hovorí, že $|\sin z|$ nie je ohraničená funkcia. Čo je podstatný rozdiel oproti reálnej funkcii $\sin x$, pre ktorú platí $|\sin x| \leq 1$.

Pomocou Liouvilleovej vety dokážeme nasledujúcu vetu.

Dôsledok 6.5.5 — Základná veta algebry. Každá algebrická rovnica

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

stupňa $n \geq 1$, kde $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, má aspoň jeden koreň.

Dôkaz. Postupujeme sporom. Nech $P(z)$ je polynóm stupňa aspoň 1, ktorý nemá žiaden koreň, t. j. $P(z) \neq 0$ pre každé $z \in \mathbb{C}$. Potom funkcia

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

je definovaná na celej komplexnej rovine $\mathbb{C}$ a je tam holomorfná. Nakoľko stupeň polynómu je $n \geq 1$, platí

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0.$$

To znamená, že k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $K > 0$ také, že pre všetky z také, že $|z| > K$ je $|f(z)| < \varepsilon$. V kruhu $|z| \leq K$ je funkcia $f(z)$ spojitá, a teda aj ohraničená. Podľa Liouvilleovej vety je potom $f(z)$ konštantnou funkciou. Potom by mala byť tiež $P(z)$ konštantnou funkciou. Čo však nemôže byť pretože požadujeme, aby $P(z)$ nebol polynóm nultého stupňa. ■

V závere kapitoly uvedieme asi najšpecifickejší dôsledok, ktorým tému odlišnosti voči reálnemu oboru zavříme.

Dôsledok 6.5.6 — Princíp maxime modulu. Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná a nekonštantná funkcia na oblasti $\Omega \subset D_f$.

Potom $|f(z)|$ nenadobúda svoje maximum v žiadnom bode $z \in \Omega$.

Predchádzajúce tvrdenie niekedy formulujeme nasledujúcim spôsobom.

R Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná na ohraničenej oblasti $\Omega \subset D_f$ a spojitá na uzávere oblasti Ω .

Potom $|f(z)|$ nadobúda svoje maximum vždy na hranici $\partial\Omega$, t. j.

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial\Omega} |f(w)|, \quad z \in \Omega.$$

Dôkaz. Postupujeme sporom. Nech existuje $z_0 \in \Omega$, kde $|f(z)|$ nadobúda svoje maximum, t. j.

$$|f(z_0)| \leq \max_{z \in \Omega} |f(z)| \equiv a.$$

Preto pre každý bod $z \in \Omega$ platí $|f(z)| = a$ alebo $|f(z)| < a$. Vytvoríme teda disjunktný rozklad pomocou množín

$$\begin{aligned} G &= \{z \in \Omega \mid |f(z)| = a\}, \\ H &= \{z \in \Omega \mid |f(z)| < a\}. \end{aligned}$$

Zrejme platí

$$\Omega = G \cup H, \quad G \cap H = \emptyset, \quad z_0 \in G. \quad (6.5)$$

Následne overíme otvorenosť množín G a H . Najskôr G . Nech $z \in G$ je ľubovoľné. Hľadáme nejaké ε -okolie $o(z, \varepsilon)$ bodu z , ktoré je celé obsiahnuté v množine G , $o(z, \varepsilon) \subset G$. Pretože Ω je otvorená množina,

existuje vhodné $\varepsilon > 0$, že $o(z, \varepsilon) \subset \Omega$. Ukážeme, že zároveň leží v G . Podľa Cauchyho integrálneho vzorca 6.5.1 pre každú kružnicu Γ_r so stredom v bode z a polomerom $r < \varepsilon$ platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Nech parametrizácia tejto kružnice je $\Gamma_r : w(t) = z + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom

$$a = |f(z)| = \left| \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{jt})}{re^{jt}} rje^{jt} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{jt})| dt,$$

odkiaľ prevedením na jednu stranu a prenasobením 2π dostávame

$$0 \leq \int_0^{2\pi} |f(z + re^{jt})| dt - 2\pi a = \int_0^{2\pi} (|f(z + re^{jt})| - a) dt \quad (6.6)$$

Pretože a je maximálna hodnota $|f(z)|$, platí

$$|f(z + re^{jt})| \leq a, \quad \text{t. j.} \quad |f(z + re^{jt})| - a \leq 0.$$

V (6.6) integrujeme spojitú funkciu, ktorá je menšia alebo rovná nule, a zároveň je integrál nezáporný. Integrál preto musí byť rovný nule a tým pádom aj integrovaná funkcia, a preto platí

$$|f(z + re^{jt})| \leq a, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Zistili sme, že $|f(z)|$ má vo všetkých bodoch kružnice Γ_r hodnotu a . Pretože kružnica Γ_r má ľubovoľný polomer $r \in [0, \varepsilon]$, platí, že $|f(z)| = a$ pre všetky body $z \in o(z, \varepsilon)$, inými slovami $o(z, \varepsilon) \subset G$.

Overíme otvorenosť množiny H . Nech $z \in H$. Zvolíme si $\varepsilon > 0$ tak, aby spĺňalo

$$0 < \varepsilon < (a - |f(z)|).$$

Zo spojitosti funkcie $f(z)$ v bode z vyplýva, že môžeme nájsť také δ -okolie $o(z, \delta)$ bodu z , že pre všetky $w \in o(z, \delta)$ platí

$$|f(w) - f(z)| < \varepsilon.$$

A práve kvôli špeciálnej voľbe ε dostávame, že platí

$$|f(w)| < |f(z)| + \varepsilon < |f(z)| + a - |f(z)| = a$$

pre všetky $w \in o(z, \delta)$. Preto $w \in o(z, \delta) \subset H$.

Nakoľko je množina Ω súvislá, nie je možné ju pokryť dvoma otvorenými disjunktnými množinami, ktoré majú obe neprázdny prienik s Ω (viď. Definícia 2.4.7). Ak porovnáme túto skutočnosť s (6.5), zostáva nám iba možnosť, že $H \cap \Omega = \emptyset$, to však znamená, že

$$\Omega = G.$$

Potom ale funkcia $|f(z)|$ musí byť konštantná na Ω . Týmto sporom dôkaz ukončíme. ■

6.6 Cvičenia

Cvičenie 6.1 Vypočítajte nasledujúce integrály:

- a) $\int_{\Gamma} \bar{z} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t^2 + jt, t \in [0, 2]\}$, $\left[\frac{\xi}{8} - 0I\right]$
- b) $\int_{\Gamma} (x^2 + jy) dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t + jt, t \in [0, 1]\}$, $\left[\frac{9}{8} + \frac{9}{1} -\right]$
- c) $\int_{\Gamma} z^3 dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{jt}, t \in [0, 2\pi]\}$, $[0]$
- d) $\int_{\Gamma} (\bar{z})^2 dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = t + jt, t \in [0, 1]\}$. $\left[(1-1)\frac{\xi}{7}\right]$

Cvičenie 6.2 Vypočítajte nasledujúce integrály po uzavretej krivke:

- a) $\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z-j} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$, $[I \cos \frac{1}{2} \pi + I \sin \frac{1}{2} \pi]$
- b) $\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz$, kde $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 1\}$, $[12]$
- c) $\oint_{\Gamma} \frac{ze^{\pi z}}{z^2+1} dz$, kde Γ je lomená čiara $\overrightarrow{ABCA}$: $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (-1, 2)$, $[12]$
- d) $\oint_{\Gamma} \frac{ze^{\pi z}}{z^2+1} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$, $\left[I \sin \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi\right]$
- e) $\oint_{\Gamma} \frac{1}{1+z^4} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$, $\left[\frac{1}{2} \pi\right]$
- f) $\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$, $[0]$
- g) $\oint_{\Gamma} \frac{z^2 \sin^2(\frac{1}{z})}{(z-1)(z-2)} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$, $[0]$
- h) $\oint_{\Gamma} \frac{z^3}{(z^4-1)} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$. $\left[\frac{\xi}{12} -\right]$

7. Holomorfná funkcia ako mocninový rad

V tejto kapitole sa budeme zaoberať ďalšou dôležitou vlastnosťou holomorfné funkcie, a to jej reprezentáciou mocninovým radom. Začali sme holomorfnosťou funkcie, následne sme si určili jednoznačnosť mocninového rozvoja funkcie a následne sme odvodili Cauchyho integrálny vzorec 6.5.1. A práve z tejto integrálnej reprezentácie dostaneme o chvíľu rozvoj do mocninového radu. Opäť je to typický výsledok pre komplexné funkcie, ktorý v reálnom obore neplatí.

7.1 Taylorov rad

Definícia 7.1.1 — Taylorov rad. Nech je funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfná v bode $z_0 \in D_f$. Potom mocninový rad

$$\begin{aligned} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \end{aligned} \quad (7.1)$$

sa nazýva *Taylorov rad funkcie $f(z)$ v strede (číslu, bode) z_0* .

Veta 7.1.1 — Taylorova veta. Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfná v oblasti $\Omega \subset D_f$ a nech z_0 je ľubovoľný pevný bod oblasti Ω . Potom Taylorov rad (7.1) konverguje v každom bode vnútra kruhu $|z - z_0| < R$, ležiacom vo vnútri holomorfné oblasti Ω , a vo vnútri konvergenčného kruhu platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme $z_0 = 0$, teda Maclaurinov rad. Ďalej predpokladajme

kružnicu $|z| = r$, ktorá leží vo vnútri kružnice $|z| = R \subset \Omega$. Okrem toho nech $\Gamma_0 : |z| = r_0$ je sústredná kružnica s oboma predchádzajúcimi a platí $r < r_0 < R$.

Potom pre ľubovoľné číslo w z vnútra kružnice Γ_0 ($w \in \Gamma_0 : |z| = r_0 \subset \Omega$) podľa Cauchyho integrálnej formuly platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=R} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Okrem toho pre dve rôzne komplexné čísla $z \in |z| = r$ a $w \in \Gamma_0 : |z| = r_0$ platí

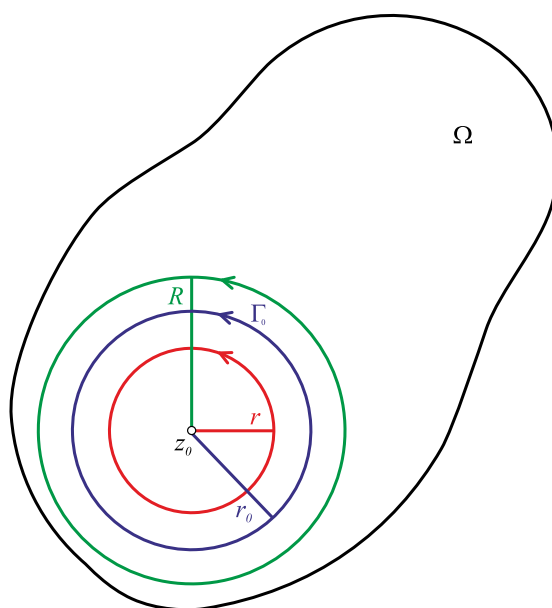
$$\frac{1}{w-z} = \frac{\frac{1}{w}}{1 - \frac{z}{w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w} \cdot \left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}},$$

pre všetky $w \in \Gamma_0$, teda $|z| < |w| \Leftrightarrow \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{r}{r_0} < 1$, keďže k tomuto radu existuje majorantný geometrický rad s kvocientom $\frac{r}{r_0} < 1$.

Následne s použitím Cauchyho fundamentálnej vety 6.3.1 a jej dôsledkov, ako aj vyššie spomenutej Cauchyho integrálnej formuly 6.5.2 zrejme platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_0: |z|=r_0} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2\pi j} \oint_{\Gamma_0: |z|=r_0} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot z^n.$$

■



Obr. 7.1.1: Taylorova veta

Pripomeňme si Vetu 4.3.4 o jednoznačnosti mocninového radu z kapitoly o mocninových radoch holomorfné funkcie, ktorá nám spolu so svojím dôsledkom hovorí, že ak existuje nekonečný rozvoj nejakej funkcie, je tento rozvoj jediný.

■ **Príklad 7.1** Nájdime Taylorov rad funkcie

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

so stredom v čísle $z_0 = -1$.

Daná funkcia je holomorfná na komplexnej rovine s výnimkou singulárneho bodu $z_1 = 1$ a na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ platí

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{-2}{(z-1)^2}, \\ f''(z) &= (-2) \cdot \frac{-2}{(z-1)^3}, \\ f'''(z) &= (-1)^2 (-2) \frac{3 \cdot 2}{(z-1)^4}, \\ &\dots \\ f^{(n)}(z) &= (-1)^{n-1} (-2) \frac{n!}{(z-1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Odkiaľ pre funkčné hodnoty týchto derivácií v čísle $z_0 = -1$ platí

$$f^{(n)}(-1) = -\frac{n!}{2^n},$$

okrem

$$f(-1) = \frac{-1+1}{-1-1} = 0.$$

Preto Taylorov rad funkcie $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ v bode $z_0 = -1$ konverguje vo vnútri kruhu $|z+1| < 2$, keďže práve na hranici sa nachádza jediný singulárny bod $z_1 = 1$ (vzdialenosť od stredu $z_0 = -1$ je práve 2), v ktorom funkcia nie je holomorfná, a teda neexistujú v ňom ani príslušné derivácie. Číže pre vnútro kružnice $|z+1| < 2$ platí

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} \cdot (z+1)^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n}.$$

■

■ **Príklad 7.2** Nájdime Taylorov rad funkcie

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

so stredom v bode $z_0 = 0$.

Daná funkcia je holomorfná na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ a platí

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{-2}{(z-1)^3}, \\ f''(z) &= \frac{3 \cdot 2}{(z-1)^4}, \\ f'''(z) &= \frac{-4 \cdot 3 \cdot 2}{(z-1)^5}, \\ &\dots \\ f^{(n)}(z) &= (-1)^n \frac{(n+1)!}{(z-1)^{n+2}}. \end{aligned}$$

čiže pre $z_0 = 0$ dostávame $f^{(n)}(z_0) = f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+2}} = (n+1)!$, a preto vo vnútri kružnice $|z| < 1$ platí

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \cdot z^n.$$

■

R Na hľadanie Taylorovho rozvoja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)$ môžeme využiť tieto tri možnosti:

1. vypočítať koeficienty a_n podľa vzťahu

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

2. alebo použiť vzťah

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

kde Γ je kladne orientovaná krivka ležiaca vo vnútri kruhu konverencie a vyhovujúca podmienkam zovšeobecneného Cauchyho integrálneho vzorca 6.5.2,

3. alebo využiť jednoznačnosť mocninového rozkladu a na hľadanie Taylorovho radu použiť vzorec pre súčet konvergujúceho geometrického radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = \frac{a_0}{1 - q},$$

ktorý platí pre $|q| < 1$.

■ **Príklad 7.3** Nájdime Taylorov rad funkcie

$$f(z) = \frac{3}{2 + z^2}$$

so stredom v čísle $z_0 = 0$.

Poznamenajme, že funkcia $f(z) = \frac{3}{2+z^2}$ má singularitu v bode $z_1 = \sqrt{2}j$, preto upravujeme v zmysle tretieho bodu vyššie uvedenej poznámky, t. j.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3}{2+z^2} = \frac{3}{2\left(1+\frac{z^2}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{2}}{1-\left(-\frac{z^2}{2}\right)} = \left/ \begin{array}{l} a_0 = \frac{3}{2} \\ q = -\frac{z^2}{2} \end{array} \right/ \left/ \begin{array}{l} \left|-\frac{z^2}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < \sqrt{2} \end{array} \right/ \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{z^2}{2}\right)^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Obor konverencie daného Taylorovho radu je vnútro kružnice $|z| < \sqrt{2}$, ktoré neobsahuje singulárny bod $z_1 = \sqrt{2}j$. ■

■ **Príklad 7.4** Nájdime Taylorov rad funkcie

$$f(z) = \frac{z}{z+2}$$

so stredom v čísle $z_0 = 0$.

Singulárny bod funkcie $f(z) = \frac{z}{z+2}$ je $z_1 = -2$. Pri hľadaní rozkladu budeme postupovať dvoma spôsobmi. Najprv upravíme

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z+2} \cdot \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{z+2}{z}} = \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{1-(-\frac{2}{z})} = \left/ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ q = -\frac{2}{z} \\ |-\frac{2}{z}| < 1 \Leftrightarrow 2 < |z| \end{array} \right/ \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot \left(-\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{z^n}. \end{aligned}$$

Tento Taylorov rad konverguje na vonkajšku kružnice $2 < |z|$, ktorá neobsahuje singularitu $z_1 = -2$. Ak by sme však postupovali inak, dostávame

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z+2} = \frac{z}{2-(-z)} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{z}{2}}{1-(-\frac{z}{2})} = \left/ \begin{array}{l} a_0 = \frac{z}{2} \\ q = -\frac{z}{2} \\ |-\frac{z}{2}| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2 \end{array} \right/ \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{2} \cdot \left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{n+1}}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Tento rozklad je konvergentný vo vnútri kruhu $|z| < 2$, ktorý tiež neobsahuje singulárny bod $z_1 = -2$. Preto môžeme písať

$$f(z) = \frac{z}{z+2} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{z^n}, & \text{pre } |z| > 2, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{n+1}}{2^{n+1}}, & \text{pre } |z| < 2. \end{cases}$$

Všimnime si, že ak je kvocient geometrického radu s premennou z v čitateli, je oborom konvergenzie príslušného mocninového radu *vnútro kružnice*, a naopak, ak je premenná z v menovateli kvocientu, oborom je *vonkajšok kružnice* na komplexnej rovine. ■

■ Príklad 7.5 Nájďme Taylorov rad totožnej funkcie

$$f(z) = \frac{z}{z+2}$$

so stredom v čísle $z_0 = 1$.

Stred konvergenzie daného mocninového radu je posunutý mimo počiatok súradnicového systému, preto použijeme substitúciu

$$t = z - z_0 = z - 1 \quad \Rightarrow \quad z = t + 1.$$

Dosadíme do pôvodnej funkcie (singularita je $z_1 = -2$) a upravujeme ju na požadovaný tvar

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z+2} = \frac{t+1}{t+1+2} = \frac{t+1}{t+3} = \frac{t+1+2-2}{t+3} = \frac{t+3}{t+3} - \frac{2}{t+3} \\ &= 1 - \frac{2}{t+3} = 1 + \frac{\frac{2}{3}}{1-(-\frac{t}{3})} = \left/ \begin{array}{l} a_0 = \frac{2}{3} \\ q = -\frac{t}{3} = -\frac{(z-1)}{3} \\ |-\frac{t}{3}| < 1 \Leftrightarrow |t| < 3 \\ |z-1| < 3 \end{array} \right/ \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{t}{3}\right)^n = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{3^{n+1}} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Rad konverguje vo vnútri kružnice $|z-1| < 3$ (neobsahuje singulárny bod $z_1 = -2$). ■

■ **Príklad 7.6** Nájdime Taylorov rad funkcie

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$$

so stredom v čísle $z_0 = 0$.

Najskôr si danú racionálnu funkciu rozložíme na elementárne rýdzoracionálne funkcie

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+1)(z-2)} &= \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2} \quad / \cdot (z+1)(z-2) \\ z &= A(z-2) + B(z+1), \\ z &= -1 : \quad A = \frac{1}{3}, \\ z &= 2 : \quad B = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

A potom upravíme

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{3(z+1)} + \frac{2}{3(z-2)} = \frac{\frac{1}{3}}{1-(-z)} - \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{2-z} = \frac{\frac{1}{3}}{1-(-z)} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \left/ \begin{array}{cc} a_0 = \frac{1}{3} & a_0 = \frac{1}{3} \\ q = -z & q = \frac{z}{2} \end{array} \right/ \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} (-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\frac{(-1)^n 2^n - 1}{2^n} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n ((-2)^n - 1). \end{aligned}$$

Rad konverguje na prieniku oboch oborov konvergenencie ($|z| < 1 \wedge |z| < 2$), t. j. vnútri kružnice $|z| < 1$ a neobsahuje ani jednu zo singularít $z_1 = -1$, $z_2 = 2$. ■

■ **Príklad 7.7** Nájdime Taylorov rad funkcie

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$$

so stredom v bode $z_0 = 1$.

Funkcia je tá istá ako v predchádzajúcom prípade, ale iný stred

$$t = z - z_0 = z - 1 \quad \Rightarrow \quad z = t + 1.$$

Potom

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3(z+1)} + \frac{2}{3(z-2)} = \frac{1}{3(t+2)} + \frac{2}{3(t-1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-(-\frac{t}{2})} - \frac{2}{1-t} \right) \\ &= \left/ \begin{array}{cc} a_0 = \frac{1}{2} & a_0 = 2 \\ q = -\frac{t}{2} & q = t \end{array} \right/ \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{2} \left(\frac{t}{2}\right)^n - 2t^n \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} - 2(z-1)^n \right). \end{aligned}$$

Rad konverguje na prieniku oboch oborov konvergenencie ($|z-1| < 2 \wedge |z-1| < 1$), t. j. vnútro kružnice $|z| < 1$ a neobsahuje ani jednu zo singularít $z_1 = -1$, $z_2 = 2$. ■

- R** Uvedme niekoľko mocninových rozkladov elementárnych funkcií. Čitateľovi by nemalo robiť problémy ich odvodenie.

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí

1.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

2.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

3.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

4.

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

5.

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Okrem toho, pre $|z| < 1$ platí

6.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

7.

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

- R** Niekedy je vhodné upraviť pomocou už známeho tvaru Taylorovho radu inej, podobnej funkcie.

■ **Príklad 7.8** Nájdime Taylorov rad funkcie

$$f(z) = z \cdot e^{-z^2}$$

v strede $z_0 = 0$.

Použitím Taylorovho rozvoja funkcie e^z dostávame

$$f(z) = z \cdot e^{-z^2} = /|-z^2| < \infty \Leftrightarrow |z| < \infty/ = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n!}.$$

Funkcia je holomorfná na celej komplexnej rovine. ■

■ **Príklad 7.9** Nájdime Taylorov rad funkcie

$$f(z) = \sin^2 z$$

v strede $z_0 = 0$.

Funkcia $f(z) = \sin^2 z$ je holomorfná na celej množine $\mathbb{C}$ a takisto na tejto množine platí, že

$$\sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2}.$$

keďže $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, platí pre všetky $z \in \mathbb{C}$

$$\sin^2 z = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \right) = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n-1} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

■



Takisto môže byť užitočné funkciu zderivovať alebo integrovať na vhodný tvar, aby sa táto dala rozložiť na geometrický rad.

■ **Príklad 7.10** Nájdime Taylorov rad funkcie

$$f(z) = \ln(1+z)$$

v strede $z_0 = 0$.

Derivácia funkcie $f(z) = \ln(1+z)$ je $f'(z) = \frac{1}{1+z}$, pre ktorú zrejme platí

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

pre $|z| < 1$. Odkiaľ integrovaním ľavej strany a pravej strany člen po člene dostávame

$$f(z) = \ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

■

■ **Príklad 7.11** Nájdime Taylorov rad funkcie

$$f(z) = \arctan z$$

v strede $z_0 = 0$.

Podobne ako v predchádzajúcom príklade platí

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

pre $|z| < 1$. A integráciou zrejme bude platiť

$$f(z) = \arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

■

7.2 Laurentov rad holomorfnej funkcie

V predchádzajúcej časti sme si ukázali fakt známy i z analýzy reálnej premennej, že funkciu za istých podmienok, v prípade komplexnej premennej je to holomorfnosť v oblasti, vieme rozložiť na súčet mocninového radu. Tento rozklad ponúka široké možnosti využitia či už pri vyšetrení funkcie, alebo jej nahradení pri približných výpočtoch. Problematické však je, že tento jedinečný mocninový rozklad vieme určiť za podmienok, ktoré v konečnom dôsledku vždy vedú na limitujúcu holomorfnosť v oblasti konvergenčného kruhu. Je prirodzená snaha o možnosť vyjadriť funkciu ako súčet jedného radu aj v iných oblastiach, ktoré sú v praxi omnoho viac žiadané. Ako sme si už naznačili, jednou z najčastejšie sa vyskytujúcich situácií v teórii komplexnej premennej je práve holomorfnosť vo vnútri kruhu bez svojho stredového bodu.

Problematicku si načrtujeme na rozklade nasledujúcej funkcie.

Funkcia

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

je holomorfná na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Rozklad tejto funkcie na mocninový rad so stredom v počiatku súradnicového systému je

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

ktorý konverguje vo vnútri kruhu $|z| < 1$. Samotná funkcia $f(z) = \frac{1}{1-z}$ je holomorfná aj mimo oboru konvergenencie mocninového radu, teda na vonkajšku kruhu $|z| > 1$. Tu však nie je možné danú funkciu vyjadriť ako rozklad na mocninový rad so stredom v bode nula, pretože taký rad by musel konvergovať aj v $z = 1$, kde však má funkcia singularitu.

Ak by sme netrvali na požiadavke, aby rozklad funkcie bol mocninový rad, pre $|z| > 1$ platí nasledujúci rozklad

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots - \frac{1}{z^n} - \dots \right) \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots - \frac{1}{z^{n-1}} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}. \end{aligned}$$

Vidíme, že je možné funkciu vyjadriť ako rozklad, ktorý obsahuje záporné mocniny z , ktorý konverguje v doplnku kruhu v rovine, čiže akejsi oblasti s výrezom.

Definujeme si Laurentov rad a uvedieme niektoré jeho základné vlastnosti.

Definícia 7.2.1 — Laurentov rad. Rad tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad (7.2)$$

sa nazýva *Laurentov rad funkcie $f(z)$ v bode z_0 a koeficientmi $a_n, n \in \mathbb{N}$* .

Rad $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ sa nazýva *hlavná časť Laurentovho radu*.

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ sa nazýva *regulárna časť Laurentovho radu*.

Rad (7.2) konverguje v bode $z \in \mathbb{C}$ práve vtedy, keď konverguje súčasne v tomto bode jeho hlavná aj regulárna časť, pričom jeho súčet je ich súčtom. Tá istá terminológia sa týka absolútnej a rovnomernej konvergenencie.

Oborom konvergence Laurentovho radu je prienik oborov konvergence jeho hlavnej a regulárnej časti, čo dáva i návod na jeho nájdenie. Regulárna časť Laurentovho radu je mocninový rad s istým polomerom konvergence R , ktorá konverguje na otvorenom kruhu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$. Hlavná časť síce nie je mocninový rad, ale z časti o funkcionálnych radoch vieme, že napr. zavedením substitúcie $u = \frac{1}{z - z_0}$, dostaneme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n$. Nech K je polomer konvergence tohto mocninového radu. Pri konvencii $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, položíme $r = \frac{1}{K}$. Potom hlavná časť Laurentovho radu konverguje absolútne pre všetky body množiny $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$. Celkovo Laurentov rad (7.2) konverguje absolútne na množine

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq r < |z - z_0| < R \leq \infty\},$$

ktorú budeme nazývať *medzikružie* a označovať $M(z_0, r, R)$.

Veta 7.2.1 — Laurentova veta. Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfná na medzikruží $M(z_0, r, R) \subset D_f$.

Potom sa funkcia $f(z)$ dá na tomto medzikruží rozvinúť do radu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

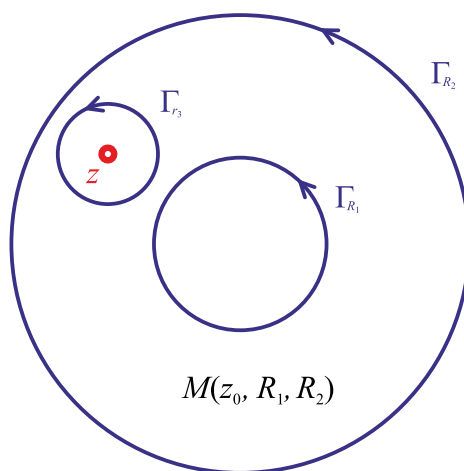
ktorého koeficienty a_n sú dané

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

kde krivka Γ je jednoduchá, uzavretá, kladne orientovaná, po častiach hladká krivka, ktorá celá leží v medzikruží M , pričom bod z_0 leží v jej vnútri.

Dôkaz. Tak ako v prípade dôkazu Taylorovej vety, bez ujmy na všeobecnosti predpokladáme, že $z_0 = 0$. Nech $z \in M(z_0, r, R)$ je ľubovoľné ale pevné číslo. Ďalej zvolíme vo vnútri medzikružia $M(z_0, r, R)$ dve sústredné kladne orientované kružnice Γ_{R_1} a Γ_{R_2} so stredom práve v $z_0 = 0$ tak, aby bod z ležal v medzikruží týchto dvoch kružníc, a teda platí $r < R_1 < |z| < R_2 < R$.

Okrem toho volíme tretiu kružnicu Γ_{r_3} so stredom v bode z a polomerom r_3 dostatočne malým, aby ležala v medzikruží $M(z_0, R_1, R_2)$ kružníc Γ_{R_1} a Γ_{R_2} tak, aby ani jednu z nich nepretínala.



Obr. 7.2.1: K dôkazu Laurentovej vety 7.2.1

Potom pre holomorfnú funkciu $g(w) : w \rightarrow \frac{f(w)}{w-z}$ v tejto oblasti platí

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_3}} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z) + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Odkiaľ vyjadrením $f(z)$ dostávame

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(w)}{z-w} dw.$$

Všimnime si, že prvý integrál na pravej strane predchádzajúceho vzťahu je asociovaný s regulárnou časťou a druhý s hlavnou časťou Laurentovho radu.

Začneme úpravou prvého integrálu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_2}} f(w) \frac{1}{w} \frac{1}{1-\frac{z}{w}} dw = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_2}} f(w) \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n dw \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_2}} f(w) \frac{1}{w} \sum_{n=0}^N \left(\frac{z}{w}\right)^n dw + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_2}} f(w) \frac{1}{w} \frac{\left(\frac{z}{w}\right)^{N+1}}{1-\frac{z}{w}} dw \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^N z^n \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_2}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw}_{a_n} + \underbrace{\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_2}} \left(\frac{z}{w}\right)^{N+1} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{\text{pre } N \rightarrow \infty \text{ je výraz rovný } 0.} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

V predošlej úprave sme zamenili poradie integrálu a sumy. K tomu potrebujeme overiť rovnomernú konvergenciu príslušného radu na krivke Γ_{R_2} . Nech $M = \max_{w \in \Gamma_{R_2}} |f(w)|$. Môžeme preto napísať odhad

$$\left| f(w) \frac{1}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^n \right| \leq M \frac{|z|^n}{|w|^{n+1}} = M \frac{|z|^n}{R_2^{n+1}}.$$

Kedže $\frac{|z|}{R_2} < 1$ má rad $\sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{1}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^n$ pre $w \in \Gamma_{R_2}$ konvergentný majorantný číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} M \frac{|z|^n}{R_2^{n+1}}$, a teda je podľa Weierstrassovho kritéria (Veta 4.1.3) rovnomerne konvergentný. A teda táto zámena mohla byť podľa Propozície 6.2.7 uskutočnená.

Podobne i druhý integrál

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(w)}{z-w} dw &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_1}} f(w) \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{w}{z}} dw = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_1}} f(w) \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^n dw \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_1}} f(w) \frac{1}{z} \sum_{n=0}^N \left(\frac{w}{z}\right)^n dw + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_1}} f(w) \frac{1}{z} \frac{\left(\frac{w}{z}\right)^{N+1}}{1-\frac{w}{z}} dw \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^N \frac{1}{z^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_1}} f(w) w^n dw}_{a_{-n}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_{R_1}} \left(\frac{w}{z}\right)^{N+1} \frac{f(w)}{z-w} dw}_{\text{pre } N \rightarrow \infty \text{ je výraz rovný } 0.} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n}. \end{aligned}$$

Opäť potrebujeme overiť rovnomernú konvergenciu príslušného radu na krivke Γ_{R_1} . Podobne označme $M = \max_{w \in \Gamma_{R_1}} |f(w)|$. Môžeme preto napísať odhad

$$\left| f(w) \frac{1}{z} \left(\frac{w}{z} \right)^n \right| \leq M \frac{|w|^n}{|z|^{n+1}} = M \frac{R_1^n}{|z|^{n+1}}.$$

Keďže $\frac{R_1}{|z|} < 1$ má rad $\sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{1}{z} \left(\frac{w}{z} \right)^n$ pre $w \in \Gamma_{R_1}$ konvergentný majorantný číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} M \frac{R_1^n}{|z|^{n+1}}$, a teda je podľa Weierstrassovho kritéria (Veta 4.1.3) rovnomerne konvergentný. Preto zámena poradia integrálu a sumy bola podľa Propozície 6.2.7 možná.

Následným sčítaním oboch získaných výsledkov sme našli Laurentov rad v strede $z = 0$ pre medzikružie $M(z_0, r, R)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

■

Je pochopiteľné, že konštrukcia Laurentovho radu pomocou hľadania jeho koeficientov vzťahom poslednej vety je nielen nepraktická, ale často i nemožná, preto skôr použijeme vhodné algebrické úpravy (rozklad racionálnych funkcií na parciálne zlomky, nahradenie elementárnych funkcií známymi mocninovými radmi, a pod).

■ **Príklad 7.12** Nájdime Laurentov rad funkcie

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

1. v bode $z_0 = 0$ pre medzikružie $M : 1 < |z| < 2$,
2. v bode $z_0 = 1$ pre medzikružie $M : 0 < |z - 1| < 1$,
3. v bode $z_0 = 0$ pre medzikružie $M : 2 < |z|$.

Najskôr rozložíme danú rýdzoracionálnu funkciu na elementárne (parciálne) zlomky

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \quad / \cdot (z-1)(z-2) \\ 1 &= A(z-2) + B(z-1), \\ 1 &= Az - 2 \cdot A + Bz - B, \\ z^1 : \dots 0 &= A + B \Rightarrow A = -B, \\ z^0 : \dots 1 &= -2A - B \Rightarrow 1 = 2B - B \Rightarrow B = 1 \Rightarrow A = -1. \end{aligned}$$

1. Hľadáme rozvoj pre medzikružie $M : 1 < |z| < 2$ pre funkciu

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Mocninový rad pre prvý zlomok odvodíme, tak aby vyhovoval prvej podmienke pre medzikružie $1 < |z|$ (vonkajšok kružnice), t. j.

$$\begin{aligned} \frac{-1}{z-1} \cdot \frac{1}{z} &= -\frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = \left/ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{z} \\ q = \frac{1}{z} \end{array} \right/ \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \Leftrightarrow 1 < |z| \left/ \right. \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n. \end{aligned}$$

Mocninový rad druhého zlomku bude vyhovovať podmienke $|z| < 2$ (vnútro kružnice), a teda

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{\frac{z}{2}} &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{z}{2}-1} = -\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = \left/ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2} \\ q = \frac{z}{2} \end{array} \right/ \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Laurentov rad zadanej funkcie v strede $z_0 = 0$ pre medzikružie $M : 1 < |z| < 2$, je preto

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \\ &= \underbrace{-\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n}_{\text{hlavná č. LR}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}}_{\text{regulárna č. LR}}. \end{aligned}$$

2. Mocninový rad hľadáme na medzikruží $M : 0 < |z-1| < 1$, čo je vlastne prstencové okolie bodu $z_0 = 1$ s polomerom 1. Prvý sčítanec má požadovaný tvar, t. j.

$$\frac{-1}{z-1} = (-1)(z-1)^{-1} = (-1) \sum_{n=-1}^{-1} (z-1)^n$$

(všimnime si, že výraz musí spĺňať $z-1 \neq 0$, teda $|z-1| > 0$) druhý sčítanec musíme na požadovaný tvar upraviť (keďže je stred posunutý mimo počiatku súradnicového systému, použijeme substitúciu $t = z-1$, odkiaľ máme $z = t+1$), t. j.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{t+1-2} = \frac{1}{t-1} = -\frac{1}{1-t} = \left/ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ q = t \end{array} \right/ \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} t^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n. \end{aligned}$$

Laurentov rad funkcie v bode $z_0 = 1$ pre medzikružie $M : 0 < |z-1| < 1$, má preto tvar

$$f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \underbrace{(-1)(z-1)^{-1}}_{\text{hlavná č. LR}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n}_{\text{regulárna č. LR}}.$$

3. Hľadáme Laurentov rad na medzikruží $M : 2 < |z|$. Funkcia $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$ má dva singulárne body $z_1 = 1$ a $z_2 = 2$. Je zrejmé, že na danom medzikruží (v tomto prípade je ním vonkajšok kružnice so stredom v bode $(0,0)$ a polomerom $\rho = 2$) je daná funkcia holomorfná. Laurentov rad hľadáme na medzikruží $|z| > R > 0$, a preto upravujeme na tvar mocninového radu konvergujúceho vo vonkajšku kružnice. Najskôr prvého sčítanca

$$\begin{aligned} \frac{-1}{z-1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z}} &= \frac{-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \left/ \begin{array}{l} a_0 = -\frac{1}{z} \\ q = \frac{1}{z} \end{array} \right/ = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \end{aligned}$$

a podobne aj druhého sčítanca

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z}} &= \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} = \left/ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{z} \\ q = \frac{2}{z} \end{array} \right/ = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{2}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

Laurentov rad danej funkcie má iba hlavnú časť, regulárna časť je identicky rovná nule. Celkovo

na obore konvergenzie $|z| > 1 \cap |z| > 2 = |z| > 2$ platí

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^{n+1}} \\ &= \underbrace{- \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \cdot z^n}_{\text{hlavná č. LR}}. \end{aligned}$$

■

Niekedy je opäť vhodné použiť už známy rozklad elementárnej funkcie na určenie rozvoja inej funkcie.

■ **Príklad 7.13** Nájdime Laurentov rad funkcie

$$f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^4}$$

v strede $z_0 = 0$.

Využijeme MacLaurinov rozvoj funkcie $\cos z$ a následným upravením dostávame

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos z - 1}{z^4} = \frac{\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) - 1}{z^4} \\ &= -\frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \dots + \frac{z^{2n-4}}{(2n)!} + \dots \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2}z^{-2}}_{\text{hlavná č. LR}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+4)!}}_{\text{regulárna č. LR}}. \end{aligned}$$

Rozvoj je konvergentný na medzikruží $M(0, 0, \infty)$.

■

7.2.1 Vzťah medzi Laurentovým radom a Fourierovým radom

Majme funkciu holomorfnú na medzikruží $M(z_0, r, R)$ obsahujúcom jednotkovú kružnicu $|z| = 1$, a to nasledujúcim spôsobom $0 \leq r < 1 < R = \infty$. Potom túto funkciu môžeme rozvinúť do Laurentovho radu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

ktorej koeficienty sú dané vzťahom

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{jt}) e^{-jnt} dt,$$

kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{jt}, t \in [0, 2\pi]\}$ je kladne orientovaná jednotková kružnica $|z| = 1$.

Ak označíme $F : t \rightarrow f(e^{jt})$ pre $t \in [0, 2\pi]$, potom dostávame

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt},$$

čo je komplexný tvar Fourierovho radu funkcie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, ktorý prepíšeme na reálny tvar

$$F(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jnt} + c_{-n} e^{-jnt}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

kde koeficienty sú

$$\begin{aligned}a_0 &= 2c_0, \\a_n &= c_n + c_{-n}, \\b_n &= j(c_n - c_{-n}).\end{aligned}$$

Alebo zo vzťahu pre Fourierove koeficienty periodickej funkcie s periódou 2π dostávame

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) dt, \\a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \cos nt dt, \\b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \sin nt dt.\end{aligned}$$

Z Eulerových vzorcov dostávame rovnosti pre goniometrické funkcie

$$\begin{aligned}\cos t &= \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \\ \sin t &= \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} = \frac{1}{2j}(z - z^{-1}) = \frac{z - \frac{1}{z}}{2j} = \frac{z^2 - 1}{2jz}.\end{aligned}$$

■ **Príklad 7.14** Nájdime Fourierov rozvoj funkcie

$$F(t) = \frac{1 - q \cos t}{1 - 2q \cos t + q^2},$$

kde $0 < |q| < 1, q \in \mathbb{R}$.

Substitúciou $z = e^{jt}$ zobrazíme interval $[0, 2\pi]$ na jednotkovú kružnicu $|z| = 1$. Ďalej použitím $\cos t = \frac{z^2 + 1}{2z}$ sa $F(t)$ zobrazí na

$$f(z) = \frac{1 - q \frac{z^2 + 1}{2z}}{1 - 2q \frac{z^2 + 1}{2z} + q^2},$$

ktorá je holomorfná na medzikruží $M(z_0, |q|, \frac{1}{|q|})$, ktoré obsahuje jednotkovú kružnicu $|z| = 1$. Následnou úpravou a rozkladom na elementárne zlomky dostávame tvar funkcie

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1 - q \frac{z^2 + 1}{2z}}{1 - 2q \frac{z^2 + 1}{2z} + q^2} = \frac{qz^2 - 2z + q}{-2q^2z + 2qz^2 + 2q - 2z} = \frac{1}{2} - \frac{q}{2(q - z)} - \frac{1}{2(qz - 1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q}{q - z} - \frac{1}{qz - 1} \right),\end{aligned}$$

ktorú na kružnici $|z| = 1$, a teda aj vo vnútri medzikružia $M(z_0, |q|, \frac{1}{|q|})$, môžeme zapísať ako rozklad

$$\begin{aligned}-\frac{q}{q - z} &= \frac{q}{z - q} = \frac{q}{z} \frac{1}{1 - \frac{q}{z}} = \frac{q}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q}{z} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{1}{z^n}, \\ -\frac{1}{qz - 1} &= \frac{1}{1 - qz} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n z^n.\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^n z^n \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{1}{z^n} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n z^n \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q^n \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right). \end{aligned}$$

Dosadením do posledného vzťahu za $z = e^{jt}$ dostaneme konečne Fourierov rozvoj

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q^n \left(e^{jnt} + \frac{1}{e^{jnt}} \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nt.$$

■

7.2.2 Laurentov rad v nevlastnom bode

Zastavíme sa ešte pri špeciálnom prípade rozvoja do Laurentovho radu v nevlastnom bode, teda v nekonečne. Ako sme už videli, často sa stáva, že je funkcia $f(z)$ holomorfná na vonkajšku kružnice $|z| > \rho > 0$. V takom prípade je prirodzené si položiť otázku, či by nebolo možné rozvinúť funkciu na tejto oblasti v okolí nekonečna. Ak by sme položili $z = \frac{1}{w}$, tak funkcia $\varphi(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = f(z)$ je definovaná a holomorfná na $0 < |w| < \frac{1}{\rho}$. Laurentov rad funkcie $f(z)$ v okolí ∞ , nájdeme pomocou Laurentovho radu funkcie $\varphi(w)$ v okolí bodu $w = 0$, nasledujúcim spôsobom

$$\varphi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} w^n,$$

na $0 < |w| < \frac{1}{\rho}$. Odkiaľ dostávame podľa definície funkcie $\varphi(w)$ rovnosť

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{kde } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Definícia 7.2.2 — Laurentov rad v nevlastnom bode. Rad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} = \dots + a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots,$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, sa nazýva *Laurentov rad funkcie $f(z)$ na prstencovom okolí bodu ∞* , resp. *Laurentov rad s nevlastným stredom ∞* , kde časť

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_{-n}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

sa nazýva *hlavná časť Laurentovho radu v nevlastnom strede ∞* a časť

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

sa nazýva *regulárna časť Laurentovho radu v nevlastnom strede ∞* .

■ **Príklad 7.15** Nájdime Laurentov rad v nevlastnom strede ∞ funkcie

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}.$$

Použitím mocninového rozkladu exponenciálnej funkcie dostávame rad

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = z^2 + z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-2}} = z^2 + z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \frac{1}{z^n},$$

ktorý konverguje pre každé $z \in \mathbb{C}$ s vlastnosťou $|z| > 0$, teda $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Z výsledku príkladu nie jasné, o aký rozklad ide. Lepšie povedané, taký istý rozvoj nájdeme, ak budeme hľadať rozklad tej istej funkcie okolo stredu 0. Aby sme tieto prípady rozlíšili, musíme buď priamo udať stred tohto radu (bod $z_0 = 0$ alebo $z_0 = \infty$), alebo určiť hlavnú a regulárnu časť Laurentovho radu.

Vidíme, že Laurentov rad funkcie $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ v strede $z_0 = \infty$ má konečnú hlavnú časť

$$z^2 + z = \sum_{n=-2}^{-1} \frac{a_{-n}}{z^n} = \sum_{n=-2}^{-1} a_n z^n,$$

kde $a_{-2} = a_{-1} = 1$, a nekonečnú regulárnu časť

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \frac{1}{z^n},$$

kde $a_n = \frac{1}{(n+2)!}$, $n \in \mathbb{N}$.

7.3 Cvičenia

Cvičenie 7.1 Nájdite Taylorov rad funkcie $f(z)$ v strede z_0 :

- a) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z_0 = 0$, $\left[u z^u (1-) \sum_{\infty}^{0=u} = \frac{z^2+1}{1} \text{ na } |z| < 1 \right]$
- b) $f(z) = \frac{z}{(z-3)^2}$, $z_0 = 0$, $\left[\frac{1+u\xi}{1-u^2} u \sum_{\infty}^{0=u} = \frac{z(\xi-z)}{z} \text{ na } |z| < 3 \right]$
- c) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2} = \frac{(z+1)^2 - 2(z+1) - 1}{(z+1)^2}$, $z_0 = 1$, $\left[u(1-z) \left(\frac{z+u\bar{z}}{1+u} - \frac{u\bar{z}}{1} \right) (1-u) \sum_{\infty}^{0=u} = \frac{z(1+z)}{z^2} \text{ na } |z-1| < 1 \right]$
- d) $f(z) = \frac{1}{3z+1}$, $z_0 = -2$, $\left[u(z+z) \frac{1+u\xi}{u\xi} \sum_{\infty}^{0=u} - \frac{1+2\xi}{1} \text{ na } \frac{\xi}{\xi} > |z+2| \right]$
- e) $f(z) = \cos^2 z$, $z_0 = 0$, $\left[\frac{i(u\bar{z})}{u\bar{z}} (1-u\bar{z}) \sum_{\infty}^{0=u} + \frac{\bar{z}}{1} = z \text{ na } |z| < \frac{\pi}{2} \right]$
- f) $f(z) = z e^{-z^2}$, $z_0 = 0$, $\left[\frac{i u}{1+u\bar{z}} u(1-) \sum_{\infty}^{0=u} = \frac{1}{z} \text{ na } |z| < \frac{\pi}{2} \right]$

Cvičenie 7.2 Rozviňte danú funkciu do Laurentovho radu na danom medzikruží:

- a) $f(z) = \frac{1}{z^2+2z-8}$ na $M(-2, 2, 4)$, $\left[\left(u(z+z) \frac{1+u\bar{z}}{1} \sum_{\infty}^{0=u} + u(z+z) u(1-) \sum_{\infty}^{0=u} \right) \frac{9}{1} \right]$
- b) $f(z) = \frac{2}{z^2-1}$ na $M(-2, 1, 3)$, $\left[u(z+z) \frac{1+u\xi}{1} \sum_{\infty}^{0=u} - u(z+z) \sum_{\infty}^{0=u} \right]$
- c) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ na $M(j, 0, 2)$, $\left[u(1-z) \frac{u(\bar{z})}{u(1-)} \sum_{\infty}^{0=u} \frac{1}{1} + \frac{(1-z)\bar{z}}{1-} \right]$
- d) $f(z) = \frac{3z}{(2z-1)(2-z)}$ na $M(0, 0, \frac{1}{2})$, $\left[\frac{u\bar{z}}{u\bar{z}} \sum_{\infty}^{0=u} + u\bar{z} u \sum_{\infty}^{0=u} \right]$
- e) $f(z) = \frac{3z}{(2z-1)(2-z)}$ na $M(0, \frac{1}{2}, 2)$, $\left[u z^{\frac{u\bar{z}}{1}} \sum_{\infty}^{0=u} \right]$

f) $f(z) = \frac{3z}{(2z-1)(2-z)}$ na $M(0, 2, \infty)$,

g) $f(z) = \frac{z+2}{z^2-4z+3}$ na $M(1, 2, \infty)$,

h) $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$ na $M(1, 0, 2)$,

ch) $f(z) = \sin \frac{z}{z-1}$ na $M(1, 1, \infty)$,

i) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ na $M(0, 0, \infty)$.

$$\left[u^z \left(|u|z - \frac{|u|z}{1} \right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{z^l}{1-l} \right]$$

$$\left[\frac{u(1-z)}{z-u} \sum_{\infty}^z \frac{z^l}{1-l} + \frac{1-z}{1} \right]$$

$$\left[u(1-z) \frac{z-u}{(1+u)u} \sum_{\infty}^z \frac{z^l}{1-l} \right]$$

$$\left[\frac{u(1-z)iu}{(\frac{z}{1+u}+1)u} \sum_{\infty}^0 \frac{z^l}{1-l} \right]$$

$$\left[\frac{z-u^2iu}{1} \sum_{\infty}^z \frac{z^l}{1-l} + z + z^2 \right]$$

Cvičenie 7.3 Nájdite Fourierov rozvoj danej funkcie:

a) $F(t) = \frac{2 \sin t}{5-4 \cos t}$,

b) $F(t) = \frac{2 \cos t - 1}{5-4 \cos t}$,

c) $F(t) = \frac{q \sin t}{1-2q \cos t + q^2}$, $|q| < 1$,

d) $F(t) = \frac{1-q^2}{1-2q \cos t + q^2}$, $|q| < 1$.

$$\left[\frac{1+u}{l(1+u)u} \sum_{\infty}^0 \frac{z^l}{1-l} \right]$$

$$\left[\frac{1+u}{l(1+u)u} \sum_{\infty}^0 \frac{z^l}{1-l} \right]$$

$$\left[u \sum_{\infty}^0 \frac{z^l}{1-l} \right]$$

$$\left[u \sum_{\infty}^0 \frac{z^l}{1-l} + 1 \right]$$

8. Klasifikácia singulárnych bodov, rezíduum

8.1 Klasifikácia singulárnych bodov

Tak ako sme už spomenuli v tretej kapitole, singulárny bod funkcie $f(z)$ je bod, v ktorom funkcia nie je holomorfná. Izolovaný singulárny bod je každý singulárny bod funkcie $f(z)$, pre ktorý existuje okolie, v ktorom táto funkcia nemá ďalší singulárny bod, t. j. v okolí tohto bodu je funkcia holomorfná.

V prípade takýchto bodov bude dôležité odhadnúť charakter chovania sa funkcie v ich blízkosti, tým máme na mysli typ nespojitosti, či ohraničenosť funkcie v okolí takejto singularity a pod.

Uvedieme dva spôsoby charakterizácie izolovaných singulárnych bodov, ktoré sa líšia prístupom, avšak je možné dokázať ich rovnocennosť.

Definícia 8.1.1 — Klasifikácia singulárnych bodov I. Nech z_0 je izolovaný singulárny bod funkcie $f(z)$.

Potom z_0 sa nazýva

1. *pól k-tého rádu (stupňa)*, ak hlavná časť Laurentovho radu funkcie $f(z)$ v bode z_0 pre medzikružie $0 < |z - z_0| < R$ je konečná, t. j. má konečný počet nenulových členov,
2. *podstatne singulárny bod*, ak hlavná časť Laurentovho radu funkcie $f(z)$ v bode z_0 pre medzikružie $0 < |z - z_0| < R$ má nekonečne veľa členov,
3. *odstrániteľný singulárny bod*, ak hlavná časť Laurentovho radu funkcie $f(z)$ v bode z_0 pre medzikružie $0 < |z - z_0| < R$ je identicky rovná nule, t. j. nemá žiadne členy.

Druhým spôsobom je náhľad cez limitu funkcie.

Propozícia 8.1.1 — Klasifikácia singulárnych bodov II. Nech z_0 je izolovaný singulárny bod funkcie $f(z)$.

Potom je tento bod je

1. *pól k-tého rádu (stupňa)* práve vtedy, keď platí

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

2. *podstatne singulárny bod* práve vtedy, keď neexistuje $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$,

3. *odstrániteľný singulárny bod* práve vtedy, keď existuje vlastná limita

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

R Izolovaný singulárny bod z_0 funkcie typu $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ je pólom k -tého stupňa, ak je k -násobným koreňom menovateľa $\psi(z)$.

Definícia 8.1.2 — Násobnosť koreňa. Nech $f(z)$ je holomorfná funkcia v okolí $o(z_0, \varepsilon)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Pokiaľ $f(z)$ nie je identicky rovná nule na $o(z_0, \varepsilon)$, potom číslo $k \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

nazývame *násobnosťou* (rádom) *koreňa* z_0 *funkcie* $f(z)$.

■ **Príklad 8.1** Určme izolovaný singulárny bod $z \in \mathbb{C}$ a klasifikujme ho.

1. Funkcia je daná

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^3}.$$

Funkcia je holomorfná všade okrem prípadu, keď je menovateľ funkcie rovný nule, t. j.

$$(z+1)^3 = 0,$$

$$z = -1.$$

Tým sme našli izolovaný singulárny bod $z_0 = -1$, ktorý je akiste pólom 3. stupňa $f(z)$, čo je zrejme aj podľa

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z}{(z+1)^3} = \infty.$$

2. Funkcia je daná

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-j}}.$$

Izolovaný singulárny bod určíme zrejme nasledujúco

$$z-j = 0,$$

$$z = j.$$

Exponenciálna funkcia má Taylorov rozvoj

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

rozvojom funkcie $e^{\frac{1}{z-j}}$ zrejme preto bude

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z-j}} &= 1 + \frac{1}{z-j} + \frac{\left(\frac{1}{z-j}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{z-j}\right)^3}{3!} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{z-j}\right)^n}{n!} + \dots \\ &= 1 + \underbrace{(z-j)^{-1} + \frac{(z-j)^{-2}}{2} + \frac{(z-j)^{-3}}{3!} + \dots + \frac{(z-j)^{-n}}{n!}}_{\text{hlavná časť Laurentovho radu}} + \dots \end{aligned}$$

Z uvedeného vidíme, že hlavná časť Laurentovho radu funkcie $f(z) = e^{\frac{1}{z-j}}$ v bode $z_0 = j$ pre medzikružie $0 < |z-j| < \infty$ má nekonečne veľa členov, a preto aj izolovaný singulárny bod $z_0 = j$ je podstatne singulárnym bodom funkcie $f(z) = e^{\frac{1}{z-j}}$.

3. Funkcia je daná

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Izolovaný singulárny bod je $z_0 = 0$ a Taylorov rozvoj goniometrickej funkcie sínus je

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

A zrejme platí

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \dots$$

regulárna časť Laurentovho radu

Rozvoj funkcie $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ v bode $z_0 = 0$ na medzikruží $0 < |z| < 1$ má iba členy s kladnou mocninou (regulárna časť Laurentovho radu), hlavná časť v rozvoji nie je zastúpená, a preto je bod $z_0 = 0$ odstrániteľným singulárnym bodom. Platí tiež

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

■

R Pri určovaní typu singularity funkcie $f(z)$ v nekonečne, t. j. v bode $z_0 = \infty$, postupujeme ako pri určovaní singularity funkcie $f\left(\frac{1}{w}\right)$ v bode $w_0 = 0$. Napr.: funkcia $f(z) = z^2$ má v nekonečne pól druhého rádu, nakoľko funkcia $f\left(\frac{1}{w^2}\right)$ má pól druhého rádu v bode $w_0 = 0$.

8.2 Rezíduum funkcie

Z koeficientov Laurentovho radu funkcie $f(z)$ v bode z_0 na medzikruží $0 < |z - z_0| < R$ má výnimočné postavenie koeficient a_{-1} , pre ktorý platí

$$a_{-1}(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} f(z) dz,$$

kde Γ je ľubovoľná kladne orientovaná Jordanova krivka obsahujúca singulárny bod z_0 vo svojom vnútri. Jeho výnimočnosť spočíva v tom, že pokiaľ vieme nejakým spôsobom určiť jeho hodnotu, teda nájsť koeficienty Laurentovho radu funkcie, vieme vypočítať krivkový integrál tejto funkcie nasledujúcim spôsobom

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \cdot a_{-1}(z_0).$$

Definícia 8.2.1 — Rezíduum funkcie. Nech funkcia $f : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná v nejakom prstencovom okolí bodu z_0 .

Potom koeficient a_{-1} Laurentovho radu funkcie $f(z)$ v bode z_0 nazývame *rezíduum funkcie $f(z)$ v bode z_0*

$$\text{ozn.: } a_{-1}(z_0) = \text{res } f(z_0) = \text{res}_{z=z_0} f(z).$$

Veta 8.2.1 — Výpočet rezídua v póle k -tého rádu. Ak z_0 je pól k -tého rádu funkcie $f(z)$, potom

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(f(z) \cdot (z - z_0)^k \right).$$

Dôkaz. Ak je z_0 pól k -tého rádu funkcie $f(z)$, potom platí

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k}$$

čiže

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k}.$$

Ak túto rovnosť $(k-1)$ krát zderivujeme, máme

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \cdot (n+k)(n+k-1) \cdots (n+2) \cdot (z - z_0)^{n+1},$$

následne limitným prechodom pre $z \rightarrow z_0$ dostávame

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) = a_{-1} \cdot (-1+k)(-1+k-1) \cdots (-1+2) = (k-1)! \cdot a_{-1},$$

odkiaľ priamo vyplýva tvrdenie vety. ■

Propozícia 8.2.2 — Výpočet rezídua v póle 1. rádu. Pre pól 1. rádu z_0 funkcie $f(z)$ zrejme platí

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Dôsledok 8.2.3 — Výpočet rezídua v póle 1. rádu. Nech $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, kde funkcie $\varphi(z)$ je holomorfná v okolí bodu z_0 a $\psi(z)$ je holomorfná v prstencovom okolí bodu z_0 s $\psi(z_0) = 0$ a $\psi'(z_0) \neq 0$.

Potom z_0 je pólom 1. rádu a pre rezíduum v tomto bode platí

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Dôkaz. Podľa Vety 8.2.1 a predpokladov platí

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{(z - z_0)}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

■



Hodnotu rezídua funkcie v izolovanom singulárnom bode, ktorý je podstatne singulárnym bodom, môžeme počítať len pomocou rozvoja funkcie do Laurentovho radu.



Hodnota rezídua funkcie v izolovanom singulárnom bode, ktorý je odstrániteľným singulárnym bodom, je rovná nule.

■ **Príklad 8.2** Nájdime izolované singulárne body funkcie, klasifikujme ich a vypočítajme v nich hodnotu rezídua.

1. Funkcia je daná

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}.$$

Funkcia má tri singulárne body $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$. všetko sú to jednoduché korene menovateľa funkcie, a teda sú to póly 1. rádu a platí pre ne

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=0} f(z) &= \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z(1-z^2)} = \lim_{z \rightarrow 0} (z-0) \frac{1}{z(1-z^2)} = 1, \\ \operatorname{res}_{z=-1} f(z) &= \operatorname{res}_{z=-1} \frac{1}{z-z^3} = \frac{1}{(z-z^3)'} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{1-3z^2} \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{res}_{z=1} f(z) &= \operatorname{res}_{z=1} \frac{1}{z-z^3} = \frac{1}{(z-z^3)'} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1-3z^2} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Funkcia je daná

$$f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}.$$

Jediný singulárny bod má funkcia v $z_1 = -1$. Keďže $\lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin 2z}{(z+1)^3} = \infty$, je tento singulárny bod pólom, konkrétne pólom 3. stupňa, a platí

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-1} f(z) &= \operatorname{res}_{z=-1} \frac{\sin 2z}{(z+1)^3} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\sin 2z}{(z+1)^3} \cdot (z+1)^3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} (-4 \sin 2z) = 2 \sin 2. \end{aligned}$$

3. Funkcia je daná

$$f(z) = \sin \frac{1}{1-z}.$$

Nakoľko $\lim_{z \rightarrow 1} \sin \frac{1}{1-z}$ neexistuje, má daná funkcia v singulárnom bode $z_1 = 1$ podstatne singulárny bod, v ktorom vieme hodnotu rezídua určiť jedine rozvojom do Laurentovho radu, t. j.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin \frac{1}{1-z} = -\sin \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} \\ &= -\underbrace{\frac{1}{1!}}_{=a_{-1}} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3!} \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{5!} \frac{1}{(z-1)^5} + \dots \end{aligned}$$

Preto platí

$$\operatorname{res}_{z=1} \sin \frac{1}{1-z} = a_{-1} = -1.$$

4. Funkcia je daná

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Jediným singulárnym bodom funkcie je bod $z_1 = 0$, ktorý je odstrániteľným singulárnym bodom, keďže $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 < \infty$, a teda platí

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 0,$$

čo vidíme i z Laurentovho rozvoja

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

■

8.2.1 Rezíduum v nekonečne

Upríamme teraz našu pozornosť na prípad nevlastnej singularity, teda singularity v bode ∞ . Komplexná funkcia skutočne môže mať izolovanú singularitu v bode $z = \infty$, a teda má opodstatnenie uvažovať o rezíduu funkcie v tomto bode. Uvažujme, že funkcia f je holomorfná v nejakom prstencovom okolí bodu ∞ , a teda v tomto okolí platí

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-\infty}^0 a_n z^n.$$

Ďalej nech Γ^* je záporne orientovaná Jordanova krivka, ktorá vo svojom vnútri obsahuje bod ∞ , potom platí

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^*} f(z) dz &= \oint_{\Gamma^*} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-\infty}^0 a_n z^n \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \oint_{\Gamma^*} z^n dz + \sum_{n=-\infty}^0 a_n \oint_{\Gamma^*} z^n dz \\ &= a_{-1} \oint_{\Gamma^*} z^{-1} dz = a_{-1} \oint_{\Gamma^*} \frac{1}{z} dz = -a_{-1} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = -a_{-1} \cdot 2\pi j, \end{aligned}$$

kde Γ je kladne orientovaná Jordanova krivka (opačne orientovaná voči Γ^*), vzhľadom na výsledok Príkladu 6.7, podľa ktorého platí

$$\oint_{\Gamma^*} z^n dz = - \oint_{\Gamma} z^n dz = 0$$

pre $n \neq -1, n \in \mathbb{Z}$.

Definícia 8.2.2 — Rezíduum v nekonečne. Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná v nejakom prstencovom okolí bodu ∞ .

Potom *rezíduum* funkcie $f(z)$ v bode ∞ (v *nekonečne*) nazývame číslo $-a_{-1}$, kde a_{-1} je koeficient pri mocnine z^{-1} regulárnej časti Laurentovho radu tejto funkcie na prstencovom okolí bodu ∞ ,

$$\text{ozn.: } a_{-1}(\infty) = \operatorname{res} f(\infty) = \operatorname{res}_{z=\infty} f(z).$$



Pri úvahách o singularite funkcie $f(z)$ v ∞ je vhodné si substitúciou $w = \frac{1}{z}$, kde $dw = -\frac{1}{z^2} dz$, problematiku previesť na singularitu v bode 0, teda

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname{res}_{z=0} \left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right).$$

Ak má funkcia $f(z)$ v ∞ odstrániteľný singulárny bod, má v tomto bode konečnú limitu a Laurentov rad funkcie má v prstencovom okolí ∞ iba regulárnu časť a podľa Definície 7.2.2 platí teda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}.$$

Hodnota limity v odstrániteľnom singulárnom bode ∞ preto použitím transformácie na singularitu v bode 0 je

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} = \lim_{z \rightarrow 0} (a_0 + a_{-1}z + a_{-2}z^2 + \dots) = a_0.$$

Pre jednoduchosť zavedieme označenie

$$\text{ozn. : } \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty).$$

Veta 8.2.4 — Výpočet rezídua v nekonečne. Nech funkcia $f(z) : \overline{\mathbb{C}} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná v nejakom prstencovom okolí bodu ∞ , v ktorom má táto funkcia singularitu.

1. Ak je ∞ odstrániteľným singulárnym bodom funkcie $f(z)$, potom platí

$$\text{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)),$$

resp.

$$\text{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z).$$

2. Ak je ∞ pólom k -tého rádu (stupňa) funkcie $f(z)$, potom platí

$$\text{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} (z^{k+2} f^{(k+1)}(z)) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(z^{k+2} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} f(z) \right).$$

Dôkaz. 1. V prípade odstrániteľnej singularity funkcie $f(z)$ v ∞ platí, že jej Laurentov rozvoj má tvar

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

Úpravou ľavej strany do požadovaného tvaru dostávame

$$z(f(\infty) - f(z)) = z \left(a_0 - \left(a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \right) \right),$$

odkiaľ limitným prechodom získame požadovanú rovnosť

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)) = -a_{-1} = \text{res}_{z=\infty} f(z).$$

Deriváciou rovnosti $f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$ máme

$$f'(z) = -\frac{a_{-1}}{z^2} - \frac{a_{-2}}{z^3} - \frac{a_{-3}}{z^4} - \dots,$$

následným prenasobením z^2

$$z^2 f'(z) = -a_{-1} - \frac{a_{-2}}{z} - \frac{a_{-3}}{z^2} - \dots,$$

odkiaľ takisto limitným prechodom získame dokazovaný vzťah

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z) = -a_{-1} = \text{res}_{z=\infty} f(z).$$

2. Pre pól k -tého rádu funkcie $f(z)$ v ∞ platí

$$f(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

Následne $(k+1)$ násobným derivovaním eliminujeme hlavnú časť Laurentovho rozvoja, čím dostávame rovnosť

$$f^{(k+1)}(z) = (k+1)! \frac{(-1)^{k+1} a_{-1}}{z^{k+2}} + (k+2)! \frac{(-1)^k a_{-2}}{z^{k+3}} + \dots$$

Prenásobením z^{k+2} a limitným prechodom máme

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(z^{k+2} f^{(k+1)}(z) \right) = (-1)^{k+1} (k+1)! \cdot a_{-1},$$

odkiaľ záverom

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1} = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(z^{k+2} f^{(k+1)}(z) \right).$$

R Všimnime si jeden podstatný rozdiel oproti vlastnému rezíduu. Ak v prípade odstrániteľného singulárneho bodu v konečnej hodnote bolo rezíduum vždy rovné nule, v prípade odstrániteľnej singularitu v nekonečne tomu tak nie je a rezíduum tu môže mať ľubovoľnú hodnotu.

■ **Príklad 8.3** Nájdime hodnotu rezídua funkcie

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

v nekonečne.

Vidíme, že $f(\infty) = e^0 = 1 < \infty$, a teda funkcia má v ∞ odstrániteľný singulárny bod. Použijeme oba vzťahy Vety 8.2.4 i.

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(1 - e^{\frac{1}{z}} \right) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1 - e^w}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{-e^w}{1} = -1, \\ \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left(e^{\frac{1}{z}} \right)' = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left(e^{\frac{1}{z}} \right) \left(-\frac{1}{z^2} \right) = -1. \end{aligned}$$

■ **Príklad 8.4** Nájdime hodnotu rezídua funkcie

$$f(z) = z e^{\frac{1}{z}}$$

v nekonečne.

Platí $f(\infty) = \infty$, v nekonečne má teda funkcia pól i. rádu. Podľa 2. vzťahu Vety 8.2.4 je

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) &= \frac{-1}{2!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 f''(z) = \frac{-1}{2!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left(z e^{\frac{1}{z}} \right)'' = \frac{-1}{2!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left(\frac{1}{z^3} e^{\frac{1}{z}} \right) \\ &= \frac{-1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{z}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Použijúc rozvoj do Laurentovho radu

$$f(z) = z e^{\frac{1}{z}} = z \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) = z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \dots$$

Koeficient $a_{-1} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$, odkiaľ $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1} = -\frac{1}{2}$.

■

■

■

■ **Príklad 8.5** Nech $P(z)$ a $Q(z) \neq 0$ sú polynómy toho istého stupňa. Určme hodnotu rezídua funkcie

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

v nekonečne.

Oba polynómy

$$\begin{aligned} P(z) &= p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_0, & p_n &\neq 0, \\ Q(z) &= q_n z^n + q_{n-1} z^{n-1} + \dots + q_0, & q_n &\neq 0, \end{aligned}$$

sú toho istého stupňa, čiže platí

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_n}{q_n},$$

a teda nekonečno je odstrániteľný singulárny bod. Podľa Vety 8.2.4 i.

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{P(z)}{Q(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(p_n Q(z) - q_n P(z))}{q_n Q(z)} = \frac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n^2}.$$

■ **Príklad 8.6** Nájdime rezíduum v nekonečne rýdzoracionálnej funkcie.

Rýdzoracionálna funkcia je podiel polynómov

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

kde polynóm $Q(z)$ je vyššieho stupňa ako polynóm $P(z)$.

Označme p a q koeficienty pri najvyššej mocnine príslušných polynómov. Keďže $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0$, podľa Vety 8.2.4 i. platí

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(0 - \frac{P(z)}{Q(z)} \right) = \begin{cases} \frac{-p}{q}, & \deg Q(z) = \deg P(z) + 1, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Čiže pre rýdzoracionálnu funkciu platí, $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0$ v prípade, že polynóm čitateľa je o dva väčší ako stupeň menovateľa. ■

■ **Príklad 8.7** Nájdime hodnotu rezídua funkcie

$$f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$$

v nekonečne.

Hodnotu rezídua v nekonečne vypočítame transformáciou na rezíduum v bode nula

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) &= \operatorname{res}_{z=\infty} z^2 \sin \frac{1}{z} = \operatorname{res}_{z=0} \left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right) = \operatorname{res}_{z=0} \left(-\frac{1}{z^2} \frac{1}{z^2} \sin z \right) \\ &= \operatorname{res}_{z=0} \left(-\frac{1}{z^4} \sin z \right) = \operatorname{res}_{z=0} \left(-\frac{1}{z^4} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) \right) \\ &= \operatorname{res}_{z=0} \left(-\frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!z} - \frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!} - \dots \right) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■

8.3 Cauchyho veta o rezíduách a jej využitie

Jedným z najvýznamnejších aplikácií reziduálneho počtu je jeho využitie pri výpočte krivkových integrálov po Jordanovej krivke. Zaujímavosťou je, že hodnota integrálu nezávisí od tvaru krivky v komplexnej rovine, ale závisí iba od vlastností niektorých špeciálnych bodov v jej vnútri.

Veta 8.3.1 — Cauchyho veta o rezíduách. Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfná v oblasti Ω s výnimkou konečného počtu izolovaných singulárnych bodov $z_1, z_2, \dots, z_n$. Nech Γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká krivka, ktorá aj so svojím vnútrom leží v oblasti Ω . Potom platí

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \cdot (\operatorname{res} f(z_1) + \operatorname{res} f(z_2) + \dots + \operatorname{res} f(z_n)).$$

Dôkaz. Priamo z definície rezídua a z Dôsledku 6.4.3 o superpozícii princípu deformácie krivky. ■

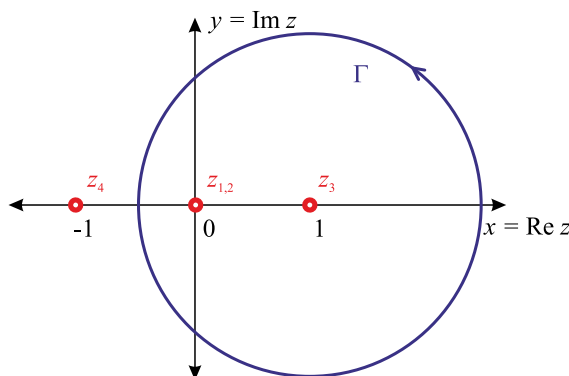
■ **Príklad 8.8** Vypočítajme integrál po uzavretej krivke

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2(z^2-1)} dz,$$

kde Γ je kladne orientovaná kružnica $\Gamma : |z - \frac{1}{2}| = 1$.

Izolované singulárne body sú:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= 0 \in \operatorname{int} \Gamma, & \text{pól 2. rádu,} \\ z_3 &= 1 \in \operatorname{int} \Gamma, & \text{pól 1. rádu,} \\ z_4 &= -1 \notin \operatorname{int} \Gamma. \end{aligned}$$



Obr. 8.3.1: Ku Príkladu 8.8

Prejdime k výpočtu jednotlivých rezíduí. Rezíduum v izolovanom singulárnom bode $z_{1,2} = 0$ vypočítame podľa Vety 8.2.1

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z_{1,2}) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{z^2(z^2-1)} \cdot (z-0)^2 \right) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{e^z}{z^2-1} \right)' \\ &= \frac{1}{1} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(z^2-1) - e^z \cdot 2z}{(z^2-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} e^z \frac{z^2-2z-1}{z^4-2z^2+1} = -1 \end{aligned}$$

a rezíduum v izolovanom singulárnom bode $z_3 = 1$ vypočítame podľa Vety 8.2.3

$$\operatorname{res} f(z_3) = \frac{e^z}{(z^4 - z^2)'} \Big|_{z=z_3=1} = \frac{e^z}{4z^3 - 2z} \Big|_{z=z_3=1} = \frac{e}{2}.$$

Samotný integrál vypočítame pomocou Cauchyho vety o rezíduách 8.3.1

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2(z^2 - 1)} dz = 2\pi j (\operatorname{res} f(z_{1,2}) + \operatorname{res} f(z_3)) = 2\pi j \cdot \left(-1 + \frac{e}{2}\right) = (-2 + e) \pi j.$$

■

■ **Príklad 8.9** Vypočítajme integrál po uzavretej krivke

$$\oint_{\Gamma} (z-1) \cos \frac{1}{z-1} dz,$$

kde Γ je kladne orientovaná kružnica $\Gamma: |z| = 2$.

Jediný izolovaný singulárny bod $z_0 = 1$ leží vo vnútri krivky Γ . Nejde však o pól funkcie $f(z)$, keďže $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cos \frac{1}{z-1}$ neexistuje, je teda izolovaný singulárny bod $z_0 = 1$ podstatne singulárnym bodom.

Rezíduum preto budeme hľadať pomocou rozvoja Laurentovho radu funkcie $f(z) = (z-1) \cos \frac{1}{z-1}$. Platí

$$\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \\ \cos \frac{1}{z-1} &= 1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \dots, \\ (z-1) \cos \frac{1}{z-1} &= (z-1) - \underbrace{\frac{1}{2!(z-1)}}_{a_{-1} \cdot (z-1)^{-1}} + \frac{1}{4!(z-1)^3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-1)^{2n-1}} + \dots \end{aligned}$$

Odkiaľ vidíme, že $\operatorname{res} f(z_0) = a_{-1} = \frac{-1}{2!} = \frac{-1}{2}$ a výsledok krivkového integrálu je

$$\oint_{\Gamma} (z-1) \cos \frac{1}{z-1} dz = 2\pi j \cdot \operatorname{res} f(z_1) = 2\pi j \left(\frac{-1}{2} \right) = -\pi j.$$

■

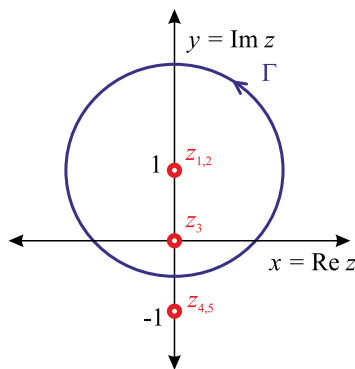
■ **Príklad 8.10** Vypočítajme integrál po uzavretej krivke

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z(z^2 + 1)^2} dz,$$

kde Γ je kladne orientovaná kružnica $\Gamma: |z-j| = \frac{3}{2}$.

Izolované singulárne body sú:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= j \in \operatorname{int} \Gamma, & \text{pól 2. rádu,} \\ z_3 &= 0 \in \operatorname{int} \Gamma, & \text{pól 1. rádu,} \\ z_{4,5} &= -j \notin \operatorname{int} \Gamma. \end{aligned}$$



Obr. 8.3.2: Ku Príkladu 8.10

Vypočítame hodnoty rezíduí, najskôr v bode $z_{1,2} = j$ to bude

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z_{1,2}) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow j} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z(z-j)^2(z+j)^2} \cdot (z-j)^2 \right) = \lim_{z \rightarrow j} \left(\frac{1}{z(z+j)^2} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow j} \left(\left(z(z+j)^2 \right)^{-1} \right)' = \lim_{z \rightarrow j} (-1) \left(z(z+j)^2 \right)^{-2} \left((z+j)^2 + z \cdot 2(z+j) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow j} \frac{-(z+j)^2 - z \cdot 2(z+j)}{\left(z(z+j)^2 \right)^2} = \frac{4+4}{-4} = -2, \end{aligned}$$

a potom v bode $z_3 = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z_3) &= \left. \frac{1}{\left(z(z^2+1)^2 \right)'} \right|_{z=z_3=0} = \left. \frac{1}{(z(z^4+2z^2+1))'} \right|_{z=z_3=0} = \left. \frac{1}{(z^5+2z^3+z)'} \right|_{z=z_3=0} \\ &= \left. \frac{1}{(5z^4+6z^2+1)} \right|_{z=z_3=0} = 1. \end{aligned}$$

Ak by sme počítali rezíduum v bode $z_3 = 0$ nie podľa Vety 8.2.3, ale podľa všeobecného vzťahu pre výpočet rezídua v póle k -tého stupňa 8.2.I, dostávame ten istý výsledok.

$$\operatorname{res} f(z_3) = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{z(z^2+1)^2} \cdot (z-0) \right)^{(1-1)} = \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z^2+1)^2} = 1.$$

Krivkový integrál je teda rovný

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z(z^2+1)^2} dz = 2\pi j (\operatorname{res} f(z_{1,2}) + \operatorname{res} f(z_3)) = 2\pi j (-2 + 1) = -2\pi j.$$

■

Veta 8.3.2 — Zovšeobecnená reziduálna veta. Nech funkcia $f(z) : \overline{\mathbb{C}} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfná na $\overline{\mathbb{C}}$ s výnimkou konečného počtu izolovaných singulárnych bodov $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Potom platí

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Dôkaz. Nech $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R > 0\}$ je kladne orientovaná kružnica s polomerom R dostatočne veľkým, aby jej vnútro obsahovalo všetky izolované singulárne body $z_1, z_2, \dots, z_n$. Potom podľa Cauchyho vety o rezíduách platí

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k)$$

a tiež

$$\oint_{\Gamma^*} f(z) dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=\infty} f(z).$$

Porovnaním dostávame

$$2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k) = -2\pi j \operatorname{res}_{z=\infty} f(z),$$

odkiaľ priamo vyplýva tvrdenie vety. ■

■ **Príklad 8.11** Vypočítajme krivkový integrál

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-3)(z^{10}-1)} dz,$$

kde krivka Γ kladne orientovaná kružnica $\Gamma: |z| = 2$.

Vnútri krivky Γ sa nachádza desať jednoduchých pólov funkcie $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^{10}-1)}$. Ich nájdenie ako aj celkový výpočet desiatich rezíduí v týchto póloch je výpočtovo značne náročný. Vyhňeme sa tomu tým, že vypočítame hodnoty rezíduí v singularitách vo vonkajšku krivky Γ . Sú to dve singularity

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 \in \operatorname{ext} \Gamma, & \text{pól 1. rádu,} \\ z_2 &= \infty \in \operatorname{ext} \Gamma, & \text{pól 1. rádu.} \end{aligned}$$

Rezíduum v prvom singulárnom bode $z_1 = 3$ vypočítame podľa Propozície 8.2.2

$$\operatorname{res}_{z=3} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} (z - 3) \frac{1}{(z-3)(z^{10}-1)} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{z^{10}-1} = \frac{1}{3^{10}-1},$$

rezíduum v nekonečne je podľa Príkladu 8.6

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{1}{(z-3)(z^{10}-1)} = 0.$$

Výsledok je teda podľa Vety 8.3.2

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-3)(z^{10}-1)} dz = -2\pi j \left(\frac{1}{3^{10}-1} + 0 \right) = \frac{-2\pi j}{3^{10}-1}.$$

■

■ **Príklad 8.12** Vypočítajme krivkový integrál

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^{12}}{(z^2 - 1)^2 (z^3 + 8)^3} dz,$$

kde krivka Γ kladne orientovaná kružnica $\Gamma: |z| = \frac{7}{3}$.

Všetky singulárne body funkcie

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \in \text{int } \Gamma, & \text{pól 2. rádu,} \\ z_2 &= -1 \in \text{int } \Gamma, & \text{pól 2. rádu,} \\ z_3 &= -2 \in \text{int } \Gamma, & \text{pól 3. rádu,} \\ z_4 &= 1 + j\sqrt{3} \in \text{int } \Gamma, & \text{pól 3. rádu,} \\ z_5 &= 1 - j\sqrt{3} \in \text{int } \Gamma, & \text{pól 3. rádu} \end{aligned}$$

sa nachádzajú vo vnútri krivky Γ . Z dôvodu časovej úspory pristúpime opäť k výpočtu rezíduí v singularitách mimo vnútra krivky Γ . Jediným singulárnym bodom funkcie $f(z) = \frac{z^{12}}{(z^2 - 1)^2 (z^3 + 8)^3}$ vo vonkajšku krivky Γ je nevlastný singulárny bod ∞ . Zrejme preň platí

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{12}}{(z^2 - 1)^2 (z^3 + 8)^3} = 0$$

čiže je to pól 1. rádu a opäť použitím výsledku Príkladu 8.6, keďže funkcia je rýdzoracionálna, dostávame

$$\text{res}_{z=\infty} f(z) = \text{res}_{z=\infty} \frac{z^{12}}{(z^2 - 1)^2 (z^3 + 8)^3} = -\frac{1}{1} = -1.$$

A konečným výsledkom teda podľa Vety 8.3.2 je

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^{12}}{(z^2 - 1)^2 (z^3 + 8)^3} dz = -2\pi j \cdot \text{res}_{z=\infty} f(z) = -2\pi j \cdot (-1) = 2\pi j.$$

■

8.4 Určitý integrál riešený pomocou rezíduí

Typ integrálu A – $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$

Funkcia $R(\cos t, \sin t) = R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ je racionálna funkcia, ktorej premenné sú goniometrické funkcie $x = \cos t$ a $y = \sin t$. Okrem toho predpokladáme, že $Q(x, y) = Q(\cos t, \sin t) \neq 0$ pre všetky body jednotkovej kružnice $\Gamma = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1\}$.

Použitím exponenciálneho tvaru pre jednotkovú kružnicu $\Gamma: |z| = 1$ v komplexnej rovine Ω

$$z = e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

dostávame z Eulerových vzorcov pre goniometrické funkcie rovnosti

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = \frac{1}{2} (z + z^{-1}) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \\ \sin t &= \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} = \frac{1}{2j} (z - z^{-1}) = \frac{z - \frac{1}{z}}{2j} = \frac{z^2 - 1}{2jz}. \end{aligned}$$

Ďalej zrejme platí

$$dz = j e^{jt} dt = j z dt \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{jz} dz.$$

Teda obe premenné, reálnu x a aj imaginárnu y , sme si vyjadrili pomocou komplexnej premennej z a po dosadení do pôvodného integrálu transformujeme tento na integrál po uzavretej krivke (jednotkovej kružnici $\Gamma = |z| = 1$) a vyriešime ho pomocou Cauchyho vety o rezíduách 8.3.1

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt &= \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2j}\right) \frac{1}{jz} dz = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2jz}\right) \frac{1}{jz} dz \\ &= 2\pi \cdot \sum_{|z_k| < 1} \operatorname{res}_{z_k} \left(\frac{1}{z} \cdot R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2j}\right) \right). \end{aligned}$$

R V ostatnom vzťahu sa pod označením $\sum_{|z_k| < 1} \operatorname{res}_{z_k} \left(\frac{1}{z} \cdot R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2j}\right) \right)$ myslí súčet všetkých rezíduí funkcie $f(z) = \left(\frac{1}{z} \cdot R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2j}\right) \right)$ v singulárnych bodoch tejto funkcie nachádzajúcich sa vo vnútri jednotkovej kružnice $|z| = 1$.

■ **Príklad 8.13** Vypočítajme určitý integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos t + a^2} dt,$$

kde $0 < a < 1, a \in \mathbb{R}$.

Je zreteľné, že integrovaná funkcia je racionálnou funkciou premennej $\cos t$, ktorej menovateľ sa pri daných podmienkach nerovná nule. Zavedieme preto substitúciu, kde z je jednotková kružnica $\Gamma_{|z|=1}$

$$z = e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

a teda aj

$$\cos t = \frac{1}{2} (z + z^{-1}), \quad dt = \frac{1}{jz} dz.$$

Po dosadení dostávame z pôvodného určitého integrálu integrál krivkový cez jednotkovú kružnicu $\Gamma_{|z|=1}$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos t + a^2} dt &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2} \frac{1}{jz} dz = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z - az^2 - a + a^2 z} \frac{1}{j} dz \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{j(1 - az)(z - a)} dz. \end{aligned}$$

Singulárne body tejto funkcie sú $z_1 = \frac{1}{a}$, ktorý však nepatrí do vnútra jednotkovej kružnice Γ (pre $a < 1$, $z_1 \notin \operatorname{int} \Gamma$) a $z_2 = a$, ktorý pre $a < 1$ patrí do vnútra tejto kružnice ($z_2 \in \operatorname{int} \Gamma$). Ide o pól 1. rádu a pre rezíduum v tomto bode podľa Propozície 8.2.2 platí

$$\operatorname{res} f(z_2) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \frac{1}{j(1 - az)(z - a)} = \frac{1}{j(1 - a^2)}.$$

Výsledok integrálu je podľa Cauchyho vety o rezíduách 8.3.I rovný

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos t + a^2} dt = \oint_{|z|=1} \frac{1}{j(1-az)(z-a)} dz = 2\pi j \frac{1}{j(1-a^2)} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

■ **Príklad 8.14** Vypočítajme určitý integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos t} dt,$$

kde $a > b > 0, a, b \in \mathbb{R}$.

Funkcia

$$R(x, y) = \frac{1}{a + b \cos t} = \frac{1}{a + bx}$$

je racionálna funkcia predmetného typu. Na intervale $t \in [-1, 1]$ platí $a + bx = a + b \cos t > a - b > 0$, čo vyhovuje predpokladom o nenulovosti polynómu $Q(x, y) = Q(\cos t, \sin t)$ na jednotkovej kružnici $\Gamma: |z| = 1$. Upravíme integrand na tvar premennej z , aby sme mohli integrovať cez $|z| = 1$, t. j.

$$f(z) = R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2jz}\right) \frac{1}{jz} = \frac{1}{a + b \frac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{1}{jz} = \frac{2}{j} \frac{1}{bz^2 + 2az + b}.$$

Tento integrál následne vypočítame podľa Cauchyho reziduálnej vety 8.3.I. Funkcia $f(z) = \frac{2}{j} \frac{1}{bz^2 + 2az + b}$ má singularitu v koreňoch polynómu menovateľa $bz^2 + 2az + b$, t. j.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \in \text{int } \Gamma_{|z|=1}, \\ z_2 &= \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \notin \text{int } \Gamma_{|z|=1}. \end{aligned}$$

Vo vnútri jednotkového kruhu sa nachádza pól I. rádu $z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$, a teda platí

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos t} dt &= \oint_{|z|=1} \frac{2}{j} \frac{1}{bz^2 + 2az + b} dz = 2\pi j \cdot \text{res } f(z_1) \\ &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{2}{j} \frac{1}{bz^2 + 2az + b} \cdot (z - z_1) \right) \\ &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{2}{j b (z - z_1)(z - z_2)} = \frac{4\pi}{b} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{z - z_2} = \frac{4\pi}{b} \frac{1}{z_1 - z_2} \\ &= \frac{4\pi}{b} \frac{1}{\frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} - \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}} = \frac{4\pi}{b} \frac{1}{\frac{-2\sqrt{a^2 - b^2}}{b}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

■

Typ integrálu B – $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt$

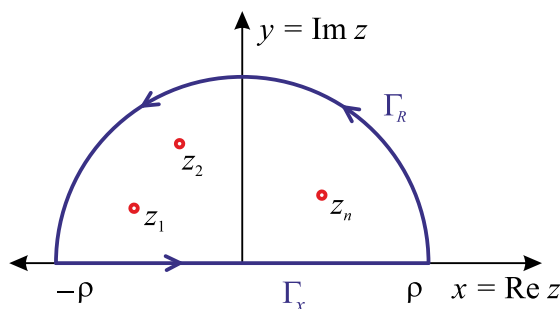
O racionálnej funkcii $f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ predpokladáme, že funkcie $P(t)$ a $Q(t)$ sú polynómy s reálnymi koeficientmi. Ďalej požadujeme, aby stupeň polynómu $Q(t)$ bol aspoň o jeden vyšší ako stupeň polynómu $P(t)$, a nech $Q(t)$ nemá žiadne korene na reálnej osi.

Uvažujme krivku $\Gamma = \Gamma_x \cup \Gamma_R$, ktorá je zložená z úsečky $\Gamma_x = [-\rho, \rho]$ na reálnej osi a z polkružnice Γ_R so stredom v počiatku súradnicového systému a polomerom tiež ρ . Tento polomer navyše budeme voliť dostatočne veľký (ale konečný), aby sa vo vnútri krivky Γ nachádzali všetky korene polynómu $Q(t)$ ležiace v hornej (kladnej) polrovine $\text{Im } z > 0$. Potom pre funkciu

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

podľa Cauchyho vety o rezíduách platí

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{\{z | Q(z)=0 \wedge \text{Im } z > 0\}} \text{res} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$



Obr. 8.4.1: Prevod nevlastného integrálu na krivkový

Integrál na ľavej strane môžeme prepísať ako súčet

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_x} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz,$$

kde zrejme platí

$$\int_{\Gamma_x} f(z) dz = \int_{-\rho}^{\rho} \frac{P(t)}{Q(t)} dt,$$

čo pre $\rho \rightarrow \infty$ je práve požadovaný integrál.

Podstatou celého zjednodušenia je fakt, že racionálna funkcia $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ podľa predpokladov konverguje v nekonečne k číslu nula minimálne rýchlosťou poklesu funkcie $\frac{1}{z^m}$, kde $m > 1$ je rozdiel stupňov polynómov $P(z)$ a $Q(z)$, a teda platí

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0.$$

Alebo inak, podľa predpokladov má racionálna funkcia

$$z^m \cdot f(z) = \frac{z^m \cdot P(z)}{Q(z)}$$

v nekonečne vlastnú limitu, t. j. je v nekonečne ohraničená konkrétnou hodnotou M ($0 < M < \infty$)

$$|z^m \cdot f(z)| = \left| \frac{z^m \cdot P(z)}{Q(z)} \right| \leq M,$$

čo implikuje

$$|f(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^m},$$

čiže pre funkciu $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ na krivke Γ_R platí, že je ohraničená, t. j.

$$\max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^m}.$$

A celkovo platí

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \|\Gamma_R\| \cdot \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \leq \pi \rho \cdot \frac{M}{|z|^m} = \pi \rho \frac{M}{\rho^m} = \frac{\pi M}{\rho^{m-1}} \rightarrow 0,$$

pre $m > 1$ a $\rho \rightarrow \infty$. Limitným prechodom pre $\rho \rightarrow \infty$ dostávame

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt = 2\pi j \sum_{\{z \mid Q(z)=0 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}} \operatorname{res} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Čím sme dokázali tvrdenie nasledujúcej vety.

Veta 8.4.1 Nech funkcia $f : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfná na polrovine $\operatorname{Im} z > 0$ s výnimkou konečného počtu singulárnych bodov ležiacich v tejto polrovine, pre ktoré platí, že $\exists R > 0 : \forall |z| \geq R$ je $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^m}$, kde $M > 0$.

Pokiaľ sú splnené vyššie uvedené podmienky a funkcia $f(z)$ má v polrovine $\operatorname{Im} z > 0$ konečný počet singulárnych bodov $z_1, z_2, \dots, z_n$, potom platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k).$$

■ **Príklad 8.15** Vypočítajme určitý integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^2} dt,$$

kde $a > 0$.

Ide o integrál vyššie uvedeného typu, kde polynóm $P(z) = z^2$ je 2. stupňa a polynóm $Q(z) = (z^2 + a^2)^2$ je 4. stupňa, preto $m = 2 > 0$. Singulárne body funkcie $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ sú

$$z_1 = aj \in \operatorname{Im} z > 0,$$

$$z_2 = -aj \notin \operatorname{Im} z > 0.$$

Rezíduum v jedinom singulárnom bode $z_1 = aj$ z otvorenej polroviny $\text{Im } z > 0$, ktoré je pólom 2. rádu, je teda

$$\begin{aligned}\text{res } f(z_1) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow aj} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2} \cdot (z - aj)^2 \right) = \lim_{z \rightarrow aj} \left(\frac{z^2}{(z + aj)^2} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow aj} \frac{2ajz}{(z + aj)^3} = \frac{1}{4aj}.\end{aligned}$$

A teda pre určitý integrál platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^2} dt = 2\pi j \cdot \text{res } f(z_1) = 2\pi j \cdot \frac{1}{4aj} = \frac{\pi}{2a}.$$

■ **Príklad 8.16** Vypočítajme nevlastný integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2 + 2t + 2)^2} dt.$$

Funkcia $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 2z + 2)^2}$ má v nekonečne charakter funkcie $\frac{1}{z^4}$. Ďalej je táto funkcia

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 2z + 2)^2} = \frac{1}{(z + 1 - j)^2 (z + 1 + j)^2}$$

holomorfná s výnimkou konečného počtu singulárnych bodov, a to

$$z_1 = -1 + j \in \text{Im } z > 0, \quad \text{pól 2. rádu,}$$

$$z_2 = -1 - j \notin \text{Im } z > 0.$$

Pôvodný nevlastný integrál teda môžeme vypočítať ako súčet rezíduí v polrovine $\text{Im } z > 0$ (v našom prípade to bude iba rezíduum v singulárnom bode $z_1 = -1 + j$)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2 + 2t + 2)^2} dt &= 2\pi j \cdot \text{res } f(z_1) \\ &= 2\pi j \cdot \lim_{z \rightarrow -1+j} \left(\frac{1}{(z + 1 - j)^2 (z + 1 + j)^2} (z + 1 - j)^2 \right)' \\ &= 2\pi j \cdot \lim_{z \rightarrow -1+j} \frac{-2}{(z + 1 + j)^3} = \frac{-2^2 \pi j}{2^3 j^3} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

■ **Typ integrálu C** – $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\alpha t} dt$

Veta 8.4.2 — Jordanova lema. Nech funkcia $f(z) : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$, je holomorfná na polkruhu $M_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R > 0, \text{Im } z > 0\}$.

Nech platí

$$\lim_{M_R \ni z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

Nech ďalej existuje polkružnica $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \mid z(t) = \rho e^{jt}, \rho > R, t \in [0, \pi]\}$ a nech existuje reálne kladné číslo $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$.

Potom platí

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) \cdot e^{j\alpha z} dz = 0.$$

Dôkaz. Použitím parametrizácie $\Gamma_R : z(t) = \rho e^{jt} = \rho (\cos t + j \sin t)$, kde $t \in [0, \pi]$ vyjadríme krivkový integrál

$$\int_{\Gamma_R} f(\rho e^{jt}) \cdot e^{j\alpha z} dz = \int_0^\pi f(\rho e^{jt}) \cdot e^{j\alpha \rho e^{jt}} \cdot \rho j e^{jt} dt.$$

Funkcia je na Γ_R ohraničená, $|f(z)| \leq M$, a teda bude platiť

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\Gamma_R} f(\rho e^{jt}) \cdot e^{j\alpha z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(\rho e^{jt}) \cdot e^{j\alpha \rho (\cos t + j \sin t)} \cdot \rho j e^{jt} dt \right| \\ &\leq \int_0^\pi \underbrace{|f(\rho e^{jt})|}_{< M} \underbrace{|e^{j\alpha \rho (\cos t)}|}_{=1} e^{-\alpha \rho \sin t} \underbrace{\rho |j e^{jt}|}_{=1} dt < M \rho \int_0^\pi e^{-\alpha \rho \sin t} dt. \end{aligned}$$

Funkcia sínus je symetrická funkcia vzhľadom na bod $\frac{\pi}{2}$ a pre každé $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ platí

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right),$$

preto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha \rho \sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-\alpha \rho \sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha \rho \sin(\frac{\pi}{2} - t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha \rho \sin(\frac{\pi}{2} + t)} dt.$$

V dôsledku symetrickosti funkcie sínus na intervale $[0, \pi]$ platí

$$\int_0^\pi e^{-\alpha \rho \sin t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha \rho \sin t} dt.$$

Okrem toho na intervale $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ v dôsledku konkávnosti funkcie sínus platí

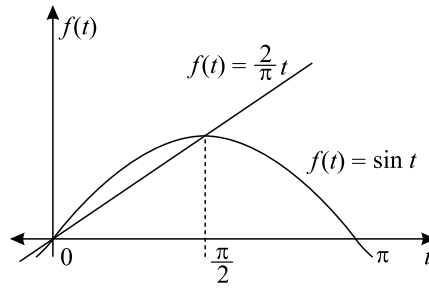
$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t.$$

Čiže platí

$$\int_0^\pi e^{-\alpha \rho \sin t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha \rho \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha \rho \frac{2}{\pi} t} dt = \left[\frac{-\pi}{\alpha \rho} e^{-\alpha \rho \frac{2}{\pi} t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\alpha \rho} (1 - e^{-\alpha \rho}) < \frac{\pi}{\alpha \rho}.$$

A z toho vyplýva odhad

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(\rho e^{jt}) \cdot e^{j\alpha z} dz \right| < M \rho \frac{\pi}{\alpha \rho} = M \frac{\pi}{\alpha},$$



Obr. 8.4.2: K dôkazu Jordanovej lemy 8.4.2

na základe ktorého platí

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) \cdot e^{j\alpha z} dz = 0.$$

■

Totožnými myšlienkovými postupmi ako v prípade integrálu typu B, môžeme odvodiť znenie nasledujúcej vety.

Veta 8.4.3 — Laplaceov integrál. Nech funkcia $f : \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je typu $f(t) \rightarrow \frac{\text{const}}{t^\alpha}$, $\alpha > 1$, pre $t \rightarrow \pm\infty$.

Ďalej nech je táto funkcia holomorfná v polrovine $\text{Im } z > 0$, s výnimkou konečného počtu bodov $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Potom pre $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\alpha t} dt = 2\pi j \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{res}_{z_k} (f(z) e^{j\alpha z}).$$

R V predchádzajúcej vete v podstate požadujeme, aby funkcia $f(t)$ bola racionálna funkcia, kde polynóm v menovateli je vyššieho stupňa ako v čitateli, teda, aby funkcia $f(t)$ bola rýdzoracionálna, čím je splnená podmienka konečnej limity v nekonečne.

■ **Príklad 8.17** Vypočítajme nevlastný integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t^2 + a^2} dt,$$

kde $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

Funkcia $\frac{\cos t}{t^2 + a^2}$ je párna funkcia, a preto platí

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{t^2 + a^2} dt.$$

Singulárne body funkcie $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ sú

$$z_1 = ja \in \text{Im } z > 0, \quad \text{pól 1. rádu,}$$

$$z_2 = -ja \notin \text{Im } z > 0.$$

Nevlastný integrál bude teda rovný

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t^2 + a^2} dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{jz}}{z^2 + a^2} \right) dz = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} (2\pi j \cdot \operatorname{res} f(z_1)) \\ &= \pi j \operatorname{Re} \left(\lim_{z \rightarrow ja} \frac{e^{jz}}{(z - ja)(z + ja)} (z - ja) \right) = \operatorname{Re} \left(\pi j \frac{e^{-a}}{2ja} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{\pi e^{-a}}{2a} \right) = \frac{\pi e^{-a}}{2a}. \end{aligned}$$

■

Typ integrálu D – $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \alpha t f(t) dt$, resp. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin \alpha t f(t) dt$

Veta 8.4.4 Nech funkcia $f: \mathbb{C} \supset D_f \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfná na polkruhu

$$M_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R > 0, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

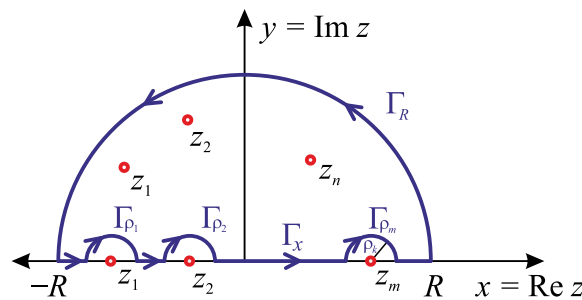
Nech platí

$$\lim_{M_R \ni z \rightarrow \infty} f(z) = 0,$$

a ďalej nech je táto funkcia holomorfná v polrovine $\operatorname{Im} z > 0$, s výnimkou konečného počtu bodov $z_1, z_2, \dots, z_n$, pričom na reálnej osi $\operatorname{Im} z = 0$ má táto funkcia konečný počet jednoduchých pólov $z_1, z_2, \dots, z_m$, a to v nulových bodoch funkcie $\cos t$ (resp. $\sin t$).

Potom pre reálne kladné číslo $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ platí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \alpha t f(t) dt &= \operatorname{Re} \left(2\pi j \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z_k} (e^{j\alpha z} f(z)) + \pi j \sum_{\operatorname{Im} z_k = 0} \operatorname{res}_{z_k} (e^{j\alpha z} f(z)) \right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin \alpha t f(t) dt &= \operatorname{Im} \left(2\pi j \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z_k} (e^{j\alpha z} f(z)) + \pi j \sum_{\operatorname{Im} z_k = 0} \operatorname{res}_{z_k} (e^{j\alpha z} f(z)) \right). \end{aligned}$$



Obr. 8.4.3: K dôkazu Vety 8.4.4

Dôkaz. Podobným spôsobom ako pri predchádzajúcich typoch úloh si určitý nevlastný integrál prevedieme na krivkový integrál cez uzavretú krivku $\Gamma = \Gamma_R \cup \Gamma_x \cup (\cup_{k=0}^m \Gamma_{\rho_k})$, kde Γ_R je polkružnica s polomerom R , krivka Γ_x je zložená z úsečiek dopĺňujúcich jednotlivé polkružnice Γ_{ρ_k} , $k = 0, 1, \dots, m$, na reálnej osi. Za funkciu vo všeobecnosti volíme exponenciálnu funkciu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha z} f(t) dt = \oint_{\Gamma} e^{j\alpha z} f(z) dz.$$

V dôkaze sa obmedzíme na krivkový integrál po jednej z kriviek Γ_{ρ_k} , zvyšné cesty integrácie sme odvodili v predchádzajúcom.

Predpokladáme, že funkcia $f(z)$ má jednoduchý pól 1. rádu v bode z_0 na reálnej osi a môžeme preto túto funkciu prepísať v tvare Laurentovho radu

$$\begin{aligned} e^{j\alpha z} f(z) &= a_{-1} (z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \\ &= \frac{\operatorname{res}_{z_0} (e^{j\alpha z} f(z))}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Platí preto

$$\int_{\Gamma_{\rho_k}} e^{j\alpha z} f(z) dz = \int_{\Gamma_{\rho_k}} \frac{\operatorname{res}_{z_0} (e^{j\alpha z} f(z))}{z - z_0} dz + \int_{\Gamma_{\rho_k}} (a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots) dz.$$

Je zrejmé, že časť $g(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$ nemá žiadne singulárne body a je teda holomorfná a podľa Cauchyho vety platí

$$\int_{\Gamma_{\rho_k}} (a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots) dz = 0.$$

Zavedením substitúcie pre oblúk kružnice s polomerom ρ so stredom z_0

$$\begin{aligned} z &= z_0 + \rho e^{jt}, \\ z - z_0 &= \rho e^{jt}, \\ dz &= j\rho e^{jt} \end{aligned}$$

dostávame

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\rho_k}} e^{j\alpha z} f(z) dz &= \int_{\Gamma_{\rho_k}} \frac{\operatorname{res}_{z_0} (e^{j\alpha z} f(z))}{z - z_0} dz = \int_{\pi}^0 \frac{\operatorname{res}_{z_0} (e^{j\alpha z} f(z))}{\rho e^{jt}} j\rho e^{jt} dt \\ &= j \operatorname{res}_{z_0} (e^{j\alpha z} f(z)) [t]_{\pi}^0 = -\pi j \operatorname{res}_{z_0} (e^{j\alpha z} f(z)). \end{aligned}$$

A teda podľa predchádzajúceho a Cauchyho vety o rezíduách platí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha z} f(t) dt &= \oint_{\Gamma} e^{j\alpha z} f(z) dz = \underbrace{\int_{\Gamma_R} e^{j\alpha z} f(z) dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\Gamma_x} e^{j\alpha z} f(z) dz}_{=2\pi j \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z_k} (e^{j\alpha z} f(z))} + \underbrace{\int_{\Gamma_{\rho_k}} e^{j\alpha z} f(z) dz}_{=-\pi j \operatorname{res}_{z_0} (e^{j\alpha z} f(z))} \\ &= 2\pi j \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z_k} (e^{j\alpha z} f(z)). \end{aligned}$$

Odkiaľ porovnaním pravej a ľavej strany rovnosti implikáciou pre $k = 1, 2, \dots, m$ a rozdelením na reálnu a imaginárnu zložku dostávame tvrdenia vety. ■

■ **Príklad 8.18** Vypočítajme nevlastný integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{(t - \frac{\pi}{2})(t - \frac{3\pi}{2})} dt.$$

Funkcia $f(z) = \frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})(z - \frac{3\pi}{2})}$ nemá v $\text{Im } z > 0$ žiadne izolované singulárne body, avšak na reálnej osi $\text{Im } z = 0$ má dve singularity

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\pi}{2} \in \text{Im } z = 0, & \text{pól I. rádu,} \\ z_2 &= \frac{3\pi}{2} \in \text{Im } z = 0, & \text{pól I. rádu,} \end{aligned}$$

ktoré sú obe pólmí prvého rádu, a preto platí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{(t - \frac{\pi}{2})(t - \frac{3\pi}{2})} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \left(\frac{e^{jz}}{(z - \frac{\pi}{2})(z - \frac{3\pi}{2})} \right) dz = \text{Re} (\pi j \text{res } f(z_1) + \pi j \text{res } f(z_2)) \\ &= \text{Re} \left(\pi j \lim_{z_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{jz}}{(z - \frac{\pi}{2})(z - \frac{3\pi}{2})} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \pi j \lim_{z_2 \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{e^{jz}}{(z - \frac{\pi}{2})(z - \frac{3\pi}{2})} \left(z - \frac{3\pi}{2} \right) \right) \\ &= \text{Re} \left(\pi j \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{-\pi} + \pi j \frac{e^{j\frac{3\pi}{2}}}{\pi} \right) = \text{Re} \left(-je^{j\frac{\pi}{2}} + je^{j\frac{3\pi}{2}} \right) \\ &= \text{Re} \left(-j \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) + j \left(\cos \frac{3\pi}{2} + j \sin \frac{3\pi}{2} \right) \right) = 2. \end{aligned}$$

■ **Príklad 8.19** Vypočítajme nevlastný integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{t(t^2 + b^2)} dt,$$

kde $\alpha, b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Pre rýdzoracionálnu funkciu $f(z) = \frac{1}{z(z^2 + b^2)}$ zrejme platí $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ a jej izolované singulárne body sú

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \in \text{Im } z = 0, & \text{pól I. rádu,} \\ z_2 &= jb \in \text{Im } z > 0, & \text{pól I. rádu,} \\ z_3 &= -jb \notin \text{Im } z > 0. \end{aligned}$$

Nakoľko je integrand párna funkcia, t. j. platí $\frac{\sin \alpha(-t)}{(-t)((-t)^2 + b^2)} = \frac{\sin \alpha t}{t(t^2 + b^2)}$, môžeme podľa Vety 8.4.4 písať

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{t(t^2 + b^2)} dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{t(t^2 + b^2)} dt = \frac{1}{2} \text{Im} (2\pi j \text{res}_{z_2} (e^{j\alpha z} f(z)) + \pi j \text{res}_{z_1} (e^{j\alpha z} f(z))) \\ &= \frac{1}{2} \text{Im} \left(2\pi j \lim_{z_1 \rightarrow jb} \frac{e^{j\alpha z}}{z(z^2 + b^2)} (z - jb) + \pi j \lim_{z_2 \rightarrow 0} \frac{e^{j\alpha z}}{z(z^2 + b^2)} z \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Im} \left(2\pi j \lim_{z_1 \rightarrow jb} \frac{e^{j\alpha z}}{z(z + jb)} + \pi j \lim_{z_2 \rightarrow 0} \frac{e^{j\alpha z}}{z^2 + b^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Im} \left(2\pi j \frac{e^{j\alpha \cdot jb}}{jb(jb + jb)} + \pi j \frac{e^0}{b^2} \right) = \frac{1}{2} \text{Im} \left(2\pi j \frac{e^{-\alpha b}}{-2b^2} + \pi j \frac{1}{b^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Im} \left(-\pi j \frac{\cos \alpha b + j \sin \alpha b}{-b^2} + \pi j \frac{1}{b^2} \right) = \frac{\pi}{2b^2} (1 - \cos \alpha b). \end{aligned}$$

■

8.5 Cvičenia

Cvičenie 8.1 Vypočítajte hodnotu rezídua danej funkcie v nekonečne:

- a) $f(z) = \frac{z^8+1}{z^6(z+2)}$, [4-]
 b) $f(z) = \frac{z^4+1}{z^6-1}$, [0]
 c) $f(z) = z \cos^2 \frac{\pi}{z}$, [2π]
 d) $f(z) = \frac{\sin z}{(z^2+1)^2}$, [2π]
 e) $f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, [q-v]
 f) $f(z) = e^z \ln \frac{z-a}{z-b}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. [q∅-v∅]

Cvičenie 8.2 Vypočítajte hodnotu rezídua danej funkcie v jej izolovaných singulárnych bodoch:

- a) $f(z) = \frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$, [$\frac{LZ}{1} = (z) f^{LZ=Z} \text{saI}$, $\frac{LZ}{Z} = (z) f^{L=-Z} \text{saI}$]
 b) $f(z) = z^3 e^z$, [$\frac{LZ}{1} = (z) f^{L=0=Z} \text{saI}$]
 c) $f(z) = \frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}$, [$\frac{LZ}{Z} = (z) f^{L=-Z} \text{saI}$, $\frac{LZ}{Z} = (z) f^{L=Z} \text{saI}$, $\frac{LZ}{Z} = (z) f^{L=Z} \text{saI}$]
 d) $f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}$, [0 = (z) f^{∞=Z} \text{saI} = (z) f^{0=Z} \text{saI}]
 e) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}$, [$\frac{8}{Z \text{us}+Z} = (z) f^{∞=Z} \text{saI}$, $\frac{91}{Z \text{us}+Z \text{cos}+Z} = (z) f^{LZ=Z} \text{saI}$, $\frac{LZ}{1} = (z) f^{L=0=Z} \text{saI}$]
 f) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, kde $z \neq \infty$. [$\mathbb{Z} \ni \gamma \text{apk}$, $\gamma(1-) = (z) f^{L\gamma=Z} \text{saI}$]

Cvičenie 8.3 Použitím Cauchyho vety o rezíduách vypočítajte nasledujúce integrály:

- a) $\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{i}{2}| = 1\}$, [($\frac{2Z}{1} - 1$) [LZ]]
 b) $\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^4+1} dz$, kde $\Gamma = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 - 2x = 0\}$, [LZ $\frac{Z}{Z}$ -]
 c) $\oint_{\Gamma} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz$, kde $\Gamma = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}\}$, [0]
 d) $\oint_{\Gamma} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = \frac{1}{2}\}$, [LZ -]
 e) $\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z^2-1)(z^3-1)} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho, \rho \neq 1\}$, [0]
 f) $\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, [LZ $\frac{6}{Z}$ -]
 g) $\oint_{\Gamma} \sin^2 \frac{1}{z} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$, [0]
 h) $\oint_{\Gamma} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{1+z} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$. [LZ $\frac{Z}{Z}$ -]

Cvičenie 8.4 Použitím Cauchyho vety o rezíduách vypočítajte nasledujúce integrály:

- a) $\oint_{\Gamma} \frac{1}{1+z^{321}} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$, [0]
 b) $\oint_{\Gamma} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\}$, [LZ]
 c) $\oint_{\Gamma} \frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, [$\frac{LZ}{Z}$]

d) $\oint_{\Gamma} \frac{z^{18}+1}{(z^4+1)^3(z^6+1)} dz$, kde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$. [0]

Cvičenie 8.5 Použitím Cauchyho vety o rezíduách vypočítajte nasledujúce určité integrály:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^4} dt$, $\left[\frac{\pi}{2} \right]$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^3} dt$, $\left[\frac{8}{3} \right]$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+1}{1+t^4} dt$, $\left[\frac{\pi}{2} \right]$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2+a^2)^3} dt$, kde $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $\left[\frac{\pi}{8a^3} \right]$

e) $\int_0^{\pi} \frac{t^2}{t^4+6t^2+13} dt$, $\left[\frac{\pi}{8} \right]$

f) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{13+12\sin t} dt$, $\left[\frac{\pi}{5} \right]$

g) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cot t} dt$, kde $a \in \mathbb{R}, a > 1$, $\left[\frac{2\pi}{a} \right]$

h) $\int_0^{\infty} \frac{t \sin at}{t^2+r^2} dt$, kde $a, r \in \mathbb{R}_{>0}$, $\left[\frac{\pi}{2} \right]$

ch) $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^3 dt$, $\left[\frac{\pi}{8} \right]$

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t(t-\pi)} dt$. $\left[-\frac{\pi}{2} \right]$

9. Fourierova transformácia

9.1 Definícia Fourierovej transformácie

Fourierova transformácia je integrálnou transformáciou prevádzajúcou signál medzi časovo a frekvenčne závislým vyjadrením pomocou harmonických signálov, t. j. funkcií sínus a kosínus, všeobecne teda funkcií komplexnej exponenciály $e^{j\omega t}$. Slúži na prevod signálov z časovej oblasti do oblasti frekvenčnej, kde $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Definícia 9.1.1 — priama Fourierova transformácia. Nech funkcia $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je:

1. po častiach spojitá a derivácia je tiež po častiach spojitá,
2. a nech integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

konverguje.

Potom sa táto funkcia nazýva *originál Fourierovej transformácie* a funkcia

$$F : j\omega \rightarrow \mathcal{F}\{f(t)\}$$

sa nazýva *obraz Fourierovej transformácie* a platí pre ňu

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

kde $\omega \in (-\infty, \infty)$.

R Triedu všetkých funkcií $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktorých derivácia je tiež po častiach spojitá a ktorých integrál $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ je konečný, označíme $D_{\mathcal{F}}$.

Definícia 9.1.2 — spätná Fourierova transformácia. Zobrazenie $\mathcal{F}_{-1}\{F(j\omega)\} = \tilde{f}(t)$ definované

$$\mathcal{F}_{-1}\{F(j\omega)\} = \tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R},$$

sa nazýva *spätná Fourierova transformácia*.

Pozrime sa teraz podrobnejšie na konštantný faktor $\frac{1}{2\pi}$ vyskytujúci sa v definícii spätnej Fourierovej transformácie. Niektoré literatúry uvádzajú tento faktor rozlične "ukrytý".

Jednou z možností je umiestniť konštantu $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ do definície $\mathcal{F}$ zobrazenia a taký istý faktor aj do vzorca inverznej $\mathcal{F}_{-1}$ transformácie, a teda báza zobrazenia je $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega t} \right\}$, čím získavame istú symetrickosť.

Ďalšia možnosť je definovať priamu transformáciu ako

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j2\pi\omega t} dt$$

a spätnú transformáciu

$$\mathcal{F}_{-1}\{F(j\omega)\} = \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j2\pi\omega t} d\omega.$$

V takomto prípade je bázovou funkciou $\{e^{j2\pi\omega t}\}$.

Bez ohľadu na details, sú tieto verzie rovnaké. Samotné opodstatnenie tohto faktora je, aby funkcia $e^{j\omega t}$ "videla" seba samú iba raz.

Ak by sme sa na túto inverziu pozreli podrobnejšie zistíme, že platí

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = 2\pi f(-t).$$

Vo všeobecnosti neplatí, že by funkcie $f(t)$ a $\tilde{f}(t)$ splývali, avšak za istých netriviálnych okolností tomu tak je. Ale platí, že dve spojité funkcie z $D_{\mathcal{F}}$ sú rovnaké, ak majú rovnakú Fourierovu transformáciu.

■ **Príklad 9.1** Nájdime Fourierov obraz tzv. bránovej funkcie danej predpisom

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pre } t \in [-a, a], \\ 0, & \text{pre } t \notin [-a, a], \end{cases}$$

kde $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

Dosadením do vzťahu pre Fourierovu transformáciu z Definície 9.1.1 máme

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-a}^a \\ &= \frac{1}{j\omega} \cdot \left(\underbrace{e^{ja\omega} - e^{-ja\omega}}_{=2j \sin a\omega} \right) = \frac{2 \sin a\omega}{\omega}, \end{aligned}$$

pre všetky $\omega = (-\infty, \infty)$. Pre $\omega = 0$ ľahko po dosadení do integrálu dostaneme

$$F(0) = \int_{-a}^a 1 \cdot e^{-j0t} dt = [t]_{-a}^a = 2a.$$

■

■ **Príklad 9.2** Nájdime Fourierov obraz funkcie

$$f(t) = e^{-b|t|},$$

kde $b \in \mathbb{R}$.

Dosadíme podľa Definície 9.1.1 a rozdelením intervalu integrácie máme

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \mathcal{F}\{e^{-b|t|}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b|t|} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(b-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(b+j\omega)t} dt \\ &= \lim_{p \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{(b-j\omega)t}}{b-j\omega} \right]_p^0 - \lim_{q \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(b+j\omega)t}}{b+j\omega} \right]_0^q \\ &= \frac{1}{b-j\omega} \left(e^0 - \underbrace{\lim_{p \rightarrow -\infty} e^{(b-j\omega)p}}_{=0} \right) - \frac{1}{b+j\omega} \left(\underbrace{\lim_{q \rightarrow \infty} e^{-(b+j\omega)q}}_{=0} - e^0 \right) \\ &= \frac{1}{b-j\omega} (1-0) - \frac{1}{b+j\omega} (0-1) = \frac{2b}{b^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

pre všetky $\omega = (-\infty, \infty)$. Pre $\omega = 0$ podobne ako v predchádzajúcom príklade dostávame

$$F(0) = \frac{2}{b}.$$

■

Fourierov obraz $\mathcal{F}\{f(t)\}$ funkcie $f(t)$ sa často nazýva *spektrálnou charakteristikou funkcie $f(t)$* . Podobne absolútna hodnota obrazu $\mathcal{F}\{f(t)\}$, označovaná $F(\omega) = |F(j\omega)|$, sa nazýva *amplitúdová charakteristika* (alebo tiež *amplitúdové spektrum*) funkcie $f(t)$ a funkcia $\alpha(\omega) = -\arg F(j\omega)$, pre $\omega = (-\infty, \infty)$, sa nazýva *fázová charakteristika* (*fázové spektrum*) funkcie $f(t)$.

Pre všetky $\omega = (-\infty, \infty)$ tiež platí

$$F(j\omega) = F(\omega) e^{-j\alpha(\omega)} = A(\omega) - jB(\omega),$$

kde

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \\ B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

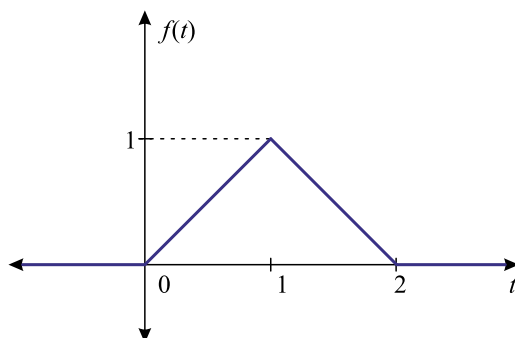
Odkiaľ vyplývajú vzťahy

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sqrt{(A(\omega))^2 + (B(\omega))^2}, \\ \alpha(\omega) &= \arctan \frac{B(\omega)}{A(\omega)}. \end{aligned}$$

Amplitúdová charakteristika $F(\omega)$ je teda párnou funkciou a fázová charakteristika je nepárnou funkciou nezávislej premennej, ktorou je frekvencia ω .

■ **Príklad 9.3** Nájdime Fourierov obraz trojuholníkového impulzu

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{pre } t \in [0, 1), \\ 2-t, & \text{pre } t \in [1, 2), \\ 0, & \text{pre } t \notin [0, 2). \end{cases}$$



Obr. 9.1.1: Trojuholníkový impulz z Príkladu 9.3

Vzhľadom na definičný obor si integrál rozdelíme

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_0^1 t \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_1^2 (2-t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \left[-\frac{te^{-j\omega t}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2} \right]_0^1 + \left[-\frac{(2-t)e^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{\omega^2} \left(\underbrace{2 - e^{-j\omega} - e^{j\omega}}_{=-2\cos\omega} \right) e^{-j\omega} = \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos\omega) e^{-j\omega} \\ &= \frac{4}{\omega^2} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right) \cdot e^{-j\omega}. \end{aligned}$$

Z výsledku vidíme, že pre amplitúdové a fázové charakteristiky platí

$$\begin{aligned} F(\omega) &= |F(j\omega)| = \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}, \\ \alpha(\omega) &= \omega, \end{aligned}$$

pre $\omega = (-\infty, \infty)$. ■

R Nech $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ je párna, potom pre všetky $\omega = [0, \infty)$ konverguje integrál

$$F_{\cos}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (9.1)$$

Okrem toho pre párnú funkciu $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ platí pre každé $t \in [0, \infty)$

$$\tilde{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_{\cos}(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (9.2)$$

R Nech funkcia $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ je nepárna, potom pre všetky $\omega = [0, \infty)$ konverguje integrál

$$F_{\sin}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (9.3)$$

A tiež pre nepárnu funkciu $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ platí pre každé $t \in [0, \infty)$

$$\tilde{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_{\sin}(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (9.4)$$

Definícia 9.1.3 Zobrazenie definované vzťahom (9.1) sa nazýva *Fourierova kosínusová transformácia* a zobrazenie určené (9.2) sa nazýva *spätná Fourierova kosínusová transformácia*.

Definícia 9.1.4 Zobrazenie definované vzťahom (9.3) nazývame *Fourierova sínusová transformácia* a zobrazenie určené (9.4) sa nazýva *spätná Fourierova sínusová transformácia*.

■ **Príklad 9.4** Nájdime Fourierov obraz funkcie

$$f(t) = e^{-t^2}.$$

Funkcia $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ je párna, keďže platí $f(-t) = f(t)$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$. Preto existuje konečný integrál

$$F_{\cos}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos \omega t dt.$$

Tento integrál konverguje pre všetky $\omega = [0, \infty)$. Ak túto rovnosť zderivujeme podľa premennej ω konverguje na $[0, \infty)$ aj integrál na pravej strane

$$F'_{\cos}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} -te^{-t^2} \sin \omega t dt.$$

Použitím per partes dostávame

$$\begin{aligned} F'_{\cos}(\omega) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-e^{-t^2} \sin \omega t \right]_0^p - \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos \omega t dt \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (0 + 0) - \underbrace{\frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos \omega t dt}_{F_{\cos}(\omega)} = -\frac{\omega}{2} F_{\cos}(\omega). \end{aligned}$$

Tým pádom môžeme písať, že funkcia $F_{\cos}(\omega)$ vyhovuje diferenciálnej rovnici

$$y'(\omega) - \frac{\omega}{2} y(\omega) = 0,$$

ktorej všeobecným riešením je

$$y(\omega) = \int \frac{\omega}{2} y(\omega) d\omega = k \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{R}.$$

Pre $\omega = 0$ je $y(0) = k \cdot e^{-\frac{0^2}{4}} = k$. Avšak zároveň pre funkciu $y(\omega) = F_{\cos}(\omega)$ v $\omega = 0$ platíⁱ

$$F_{\cos}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 0t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a teda $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Odkiaľ konečne Fourierov obraz funkcie $f(t) = e^{-t^2}$ je

$$F_{\cos}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4}},$$

pre všetky $\omega = [0, \infty)$. ■



Zásadnou vlastnosťou Fourierovej transformácie je, že prevádza gaussovské funkcie opäť na gaussovské funkcie.

V nasledujúcom príklade si ukážeme spôsob hľadania Fourierovho obrazu racionálnej funkcie pomocou Cauchyho vety o rezíduách. Nech $P(t)$, $Q(t)$ sú polynómy, pre ktoré platí $\deg Q(t) > \deg P(t)$ a navyše polynóm $Q(t)$ nemá reálne korene. Potom podľa predchádzajúcej kapitoly platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{jt} dt = 2\pi j \sum_{\omega \in \{z | Q(z)=0, \operatorname{Im} z > 0\}} \operatorname{res}_{z=\omega} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{jz} \right).$$

Zavedením substitúcie $z = -\omega t$, pre $\omega \neq 0$, prevedieme poslednú rovnosť na tvar potrebný na výpočet Fourierovho obrazu racionálnej funkcie (pre $\omega = -1$, ho už v požadovanom tvare máme), t. j.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P\left(-\frac{z}{\omega}\right)}{Q\left(-\frac{z}{\omega}\right)} e^{jz} \frac{1}{|\omega|} dz = \frac{2\pi j}{|\omega|} \sum_{\omega \in \{z | Q\left(-\frac{z}{\omega}\right)=0, \operatorname{Im} z > 0\}} \operatorname{res}_{z=\omega} \left(\frac{P\left(-\frac{z}{\omega}\right)}{Q\left(-\frac{z}{\omega}\right)} e^{jz} \right).$$

■ Príklad 9.5 Nájdieme Fourierov obraz funkcie

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Pre $\omega \neq 0$ zavedieme substitúciu $z = -\omega t \Leftrightarrow t = \frac{z}{-\omega}$, čím dostávame

$$\frac{1}{t^2 + 1} = \frac{1}{\frac{z^2}{(-\omega)^2} + 1} = \frac{\omega^2}{z^2 + \omega^2},$$

ⁱVo výpočte sme použili integrál tzv. *chybovej funkcie* $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Ak označíme $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I$, potom

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho \cdot e^{-\rho^2} d\rho d\varphi = 2\pi \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{-e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^a = \pi \left(-\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a^2} + 1 \right) = \pi,$$

odkiaľ

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

a preto, keďže jediný singulárny bod v $\text{Im } z > 0$ je $z = j|\omega| \in \text{int } \Gamma$, platí

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+1}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{z^2+\omega^2} e^{jz} \frac{1}{|\omega|} dz \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{\omega^2}{z^2+\omega^2} e^{jz} \frac{1}{|\omega|} dz = \frac{2\pi j}{|\omega|} \text{res}_{z=j|\omega|} \left(\frac{\omega^2}{z^2+\omega^2} \right) \\ &= \frac{2\pi j}{|\omega|} \lim_{z \rightarrow j|\omega|} \left(\frac{\omega^2}{z^2+\omega^2} e^{jz} \cdot (z-j|\omega|) \right) = \frac{2\pi j}{|\omega|} \lim_{z \rightarrow j|\omega|} \left(\frac{\omega^2}{z+\omega} e^{jz} \right) \\ &= \frac{2\pi j}{|\omega|} \frac{\omega^2}{2j|\omega|} e^{-|\omega|} = \pi e^{-|\omega|}. \end{aligned}$$

Pre $\omega = 0$ dostávame priamo dosadením

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow -\infty} [\arctan t]_q^p = \lim_{p \rightarrow \infty} \arctan p - \lim_{q \rightarrow -\infty} \arctan q \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{aligned}$$

■

9.2 Vlastnosti Fourierovho zobrazenia

Veta 9.2.1 — Linearita. Nech $f_1(t), f_2(t) \in D_{\mathcal{F}}$ a nech $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Potom aj $c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t) \in D_{\mathcal{F}}$ a zároveň platí

$$\mathcal{F}\{c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{F}\{f_1(t)\} \pm c_2 \mathcal{F}\{f_2(t)\}.$$

Dôkaz. Obe časti vety sú jasným vyústením vlastností po častiach spojitých funkcií a nevlastného integrálu. ■

Veta 9.2.2 — Podobnosť. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ a nech $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Potom platí

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \cdot F\left(j \frac{\omega}{a}\right).$$

Dôkaz. Použitím substitúcie bude platiť

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \int_{\substack{u=at \\ t \parallel \infty \\ u \parallel \infty}}^{\substack{u=at \\ du=|a|dt \\ t \parallel \infty \\ u \parallel \infty}} e^{-j\omega \frac{u}{a}} \frac{1}{|a|} du \\ &= \frac{1}{|a|} \cdot F\left(j \frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

■



Veta o podobnosti 9.2.2, niekedy nazývaná aj Veta o zmene mierky, hovorí, že ak sa zmení mierka v časovej oblasti, zmena vo frekvenčnom spektre sa prejaví opačným spôsobom (zdvojnásobenie vzdialeností na časovej osi sa v frekvenčnej oblasti prejaví redukciou vzdialeností na polovicu).

Veta 9.2.3 — Translácia. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ a nech $a \in \mathbb{R}$.

Potom platí

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-j\omega a} F(j\omega).$$

Dôkaz. Použitím substitúcie

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t-a)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega(a+u)} du \\ &= e^{-j\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du = e^{-j\omega a} F(j\omega). \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 9.6** Nájdime Fourierov obraz funkcie

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}.$$

Z Príkladu 9.4 vieme, že

$$\mathcal{F}\{e^{-t^2}\} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Použitím substitúcie pre integrál bude platiť

$$\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{t^2}{2}}\right\} = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

a podľa Vety o translácii 9.2.3 dostávame

$$\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}\right\} = e^{-j\omega} e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

■



Veta o translácii 9.2.3 hovorí, že posun signálu v čase sa vo frekvenčnom spektre prejaví moduláciou (násobením pôvodného obrazu harmonickou funkciou $e^{-j\omega a}$).

Veta 9.2.4 — Obraz goniometrických funkcií. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ a nech $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Potom $f(t) \sin at \in D_{\mathcal{F}}$, $f(t) \cos at \in D_{\mathcal{F}}$ a zároveň platí

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) \cdot \sin at\} &= \frac{1}{2j} (F(j(\omega-a)) - F(j(\omega+a))), \\ \mathcal{F}\{f(t) \cdot \cos at\} &= \frac{1}{2} (F(j(\omega-a)) + F(j(\omega+a))). \end{aligned}$$

Dôkaz. Goniometrické funkcie sú spojité a ohraničené na $\mathbb{R}$, preto prvá časť tvrdenia zrejme platí. Pri dôkaze druhej časti využijeme Eulerove vzorce a Vetu 9.2.1 o linearite Fourierovej transformácie

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t) \cdot \sin at\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin at \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot (e^{jat} - e^{-jat}) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega-a)t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega+a)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2j} (F(j(\omega-a)) - F(j(\omega+a))).\end{aligned}$$

Obdobne

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t) \cdot \cos at\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos at \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot (e^{jat} + e^{-jat}) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega-a)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega+a)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} (F(j(\omega-a)) + F(j(\omega+a))).\end{aligned}$$

■

■ **Príklad 9.7** Nájdime Fourierov obraz funkcie

$$f(t) = e^{-|t|} \cdot \cos t.$$

Z Príkladu 9.2 vieme

$$\mathcal{F}\{e^{-b|t|}\} = \frac{2b}{b^2 + \omega^2}, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

A teda použitím Vety 9.2.4 o obraze goniometrickej funkcie dostávame

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{-|t|} \cdot \cos t\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1 + (\omega-1)^2} + \frac{2}{1 + (\omega+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \omega^2 - 2\omega + 1} + \frac{1}{1 + \omega^2 + 2\omega + 1} \\ &= \frac{\omega^2 + 2\omega + 2 + \omega^2 - 2\omega + 2}{(\omega^2 - 2\omega + 2) \cdot (\omega^2 + 2\omega + 2)} = \frac{2\omega^2 + 4}{\omega^4 + 4}.\end{aligned}$$

■

■ **Príklad 9.8** Nájdime Fourierov obraz funkcie

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{pre } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & \text{inde.} \end{cases}$$

Použijeme Eulerov vzorec

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (e^{jt} + e^{-jt}) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{j(1-\omega)t} + e^{-j(1+\omega)t}) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{j(1-\omega)t}}{j(1-\omega)} - \frac{e^{-j(1+\omega)t}}{j(1+\omega)} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j(1-\omega)\frac{\pi}{2}} - e^{j(1-\omega)(-\frac{\pi}{2})}}{j(1-\omega)} - \frac{e^{-j(1+\omega)\frac{\pi}{2}} - e^{-j(1+\omega)(-\frac{\pi}{2})}}{j(1+\omega)} \right) \\
&= \frac{1}{(1-\omega)} \frac{e^{j(1-\omega)\frac{\pi}{2}} - e^{-j(1-\omega)\frac{\pi}{2}}}{2j} + \frac{1}{(1+\omega)} \frac{e^{j(1+\omega)\frac{\pi}{2}} - e^{-j(1+\omega)\frac{\pi}{2}}}{2j} \\
&= \frac{1}{(1-\omega)} \sin\left((1-\omega)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{(1+\omega)} \sin\left((1+\omega)\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{1-\omega^2} \left(\sin\left((1-\omega)\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left((1+\omega)\frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&\quad / \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} / \\
&= \frac{2}{1-\omega^2} \cdot 2 \sin\left(\frac{1-\omega+1+\omega}{2} \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1-\omega-1-\omega}{2} \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{4}{1-\omega^2} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(-\omega \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{1-\omega^2} \cos \omega \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Veta 9.2.5 — Derivovanie obrazu. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ a tiež $tf(t) \in D_{\mathcal{F}}$.

1. Potom platí

$$\mathcal{F}\{tf(t)\} = j \frac{dF(j\omega)}{d\omega}.$$

2. Nech navyše $t^k f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ pre $k \in \mathbb{N}^*$. Potom platí

$$\mathcal{F}\{t^k f(t)\} = j^k \frac{d^k F(j\omega)}{d\omega^k}.$$

Dôkaz. 1. Z Definície

$$\mathcal{F}\{tf(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t) e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j} \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = j \frac{dF(j\omega)}{d\omega}.$$

2. Tvrdenie je dokázateľné úplnou indukciou predchádzajúceho tvrdenia.

Veta 9.2.6 — Derivovanie originálu. Nech funkcia $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ je na $\mathbb{R}$ spojitá a $f'(t) \in D_{\mathcal{F}}$.

1. Potom platí

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega \cdot F(j\omega).$$

2. Ak k -ta derivácia $f^{(k)}(t) \in D_{\mathcal{F}}$ pre $k \in \mathbb{N}$ tak platí

$$\mathcal{F}\{f^{(k)}(t)\} = (j\omega)^k F(j\omega).$$

Dôkaz. 1. Keďže $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ je na $\mathbb{R}$ integrovateľná, a teda platí $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$. Integrovaním per partes potom získavame rovnosť

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f'(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt = \left/ \begin{array}{l} u = e^{-j\omega t} \quad u' = -j\omega e^{-j\omega t} \\ v = f'(t) \quad v' = f(t) \end{array} \right/ \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow -\infty} [f(t) e^{-j\omega t}]_q^p + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \underbrace{\lim_{p \rightarrow \infty} f(p) e^{-j\omega p}}_{=0} - \underbrace{\lim_{q \rightarrow -\infty} f(q) e^{-j\omega q}}_{=0} + j\omega \cdot F(j\omega) = j\omega \cdot F(j\omega). \end{aligned}$$

2. Tvrdenie je takisto dokázateľné úplnou indukciou predchádzajúceho tvrdenia. ■

Veta 9.2.7 — Integrovanie originálu. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ a nech pre funkciu

$$\varphi(t) = \int_0^t f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0.$$

Potom platí

$$\mathcal{F}\{\varphi(t)\} = \frac{1}{j\omega} F(j\omega).$$

Dôkaz. Podľa definície Fourierovej transformácie a integrovaním per partes, keďže $\forall t \in \mathbb{R} \varphi'(t) = f(t)$, dostávame

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\varphi(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t f(s) ds \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \left/ \begin{array}{l} u = \left(\int_0^t f(s) ds \right) \quad u' = f(t) \\ v = e^{-j\omega t} \quad v' = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \end{array} \right/ \\ &= -\lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow -\infty} \left[\left(\int_0^t f(s) ds \right) \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_q^p + \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= -\left(\underbrace{\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p)}_{=0} - \underbrace{\lim_{q \rightarrow -\infty} \varphi(q)}_{=0} \right) \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} + \frac{1}{j\omega} F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} F(j\omega). \end{aligned}$$

■

Definícia 9.2.1 — Konvolučný súčin. Nech sú funkcie $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrovateľné.

Potom funkcia $k(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

sa nazýva *konvolúcia funkcií* f a g na intervale $(-\infty, \infty)$, resp. *konvolučný súčin funkcií* na $\mathbb{R}$.

Skutočnosť označujeme $k = f * g$.

Veta 9.2.8 Konvolúcia funkcií má nasledujúce vlastnosti vyplývajúce z vlastností určitého integrálu:

1. *komutatívnosť*,

$$(f * g)(t) = (g * f)(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

2. *asociatívnosť*,

$$((f * g) * h)(t) = (f * (g * h))(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

3. *distributívnosť vzhľadom na sčítanie*,

$$((f + g) * h)(t) = (f * h)(t) + (g * h)(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dôkaz. 1. Podľa Definície 9.2.1 konvolučného súčinu máme

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau \\ &= \left/ \begin{array}{l} t - \tau = u \\ -d\tau = du \\ \lim_{\tau \rightarrow -\infty} (t - \tau) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} u(\tau) = -\infty \end{array} \right. \lim_{\tau \rightarrow -\infty} (t - \tau) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} u(\tau) = -\infty \quad \left/ \begin{array}{l} \tau = t - u \\ d\tau = -du \\ \lim_{\tau \rightarrow -\infty} (t - \tau) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} u(\tau) = \infty \end{array} \right/ \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t - u) du = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - u) f(u) du = (g * f)(t). \end{aligned}$$

2. Dvojnásobným použitím Definície 9.2.1 konvolučného súčinu

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau - s) g(s) ds \right) h(\tau) d\tau \\ &= \left/ \begin{array}{l} \tau + s = v \\ ds = dv \\ \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} (\tau + s) = \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} v(\tau) = \pm\infty \end{array} \right/ \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ s = v - \tau \end{array} \left/ \right. \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - v) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(v - \tau) h(\tau) d\tau \right) dv = (f * (g * h))(t). \end{aligned}$$

Zmenili sme poradie integrovania, čo sme však mohli na základe absolútnej integrovateľnosti funkcií z $D_{\mathcal{F}}$ na $\mathbb{R}$.

3. Priamo z Definície 9.2.1 konvolúcie a z linearít integrálu.



Veta 9.2.9 — Borelova veta. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$ a $g(t) \in D_{\mathcal{F}}$.
Potom platí

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(j\omega) \cdot G(j\omega).$$

Dôkaz. Podľa definície Fourierovej transformácie a použitím Fubiniho vety máme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{(f * g)(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega(t - \tau)} dt \right) g(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = F(j\omega) \cdot G(j\omega). \end{aligned}$$

■

Borelovu vetu 9.2.9 využijeme pri riešení diferenciálnych rovníc, kedy budeme hľadať Fourierov obraz súčinu funkcií.

9.3 Aplikácie Fourierovej transformácie

Zameriame sa na jediné z mnohých využití a to využitie Fourierovej transformácie pri riešení lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi.

Riešime lineárnu diferenciálnu rovnicu tvaru

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t),$$

kde a_i sú koeficienty, $f(t)$ je funkcia pravej strany premennej t a $y(t)$ je hľadaná funkcia (riešenie).
Nech Fourierov obraz hľadanej funkcie je

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(j\omega).$$

Použitím Vety 9.2.6 dostávame

$$\underbrace{\left((j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n \right)}_{\text{ozn. } P_n(j\omega)} \cdot Y(j\omega) = F(j\omega),$$

odkiaľ

$$Y(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{P_n(j\omega)},$$

a teda Fourierov originál riešenia má tvar

$$y(t) = \mathcal{F}_{-1}\{Y(j\omega)\} = \mathcal{F}_{-1}\left\{ \frac{F(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right\}.$$

■ **Príklad 9.9** Pomocou Fourierovej transformácie nájdime riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$y'(t) + y(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|},$$

pre ktoré platí $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$.

Použitím Fourierovej transformácie na danú rovnicu, kde pre obraz pravej strany použijeme výsledok Príkladu 9.2, bude mať táto tvar

$$j\omega \cdot Y(j\omega) + Y(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}.$$

Vyjadríme si Fourierov obraz riešenia $Y(j\omega)$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \frac{1}{1 + \omega^2} = \frac{1}{(1 + j\omega)(1 + \omega^2)}.$$

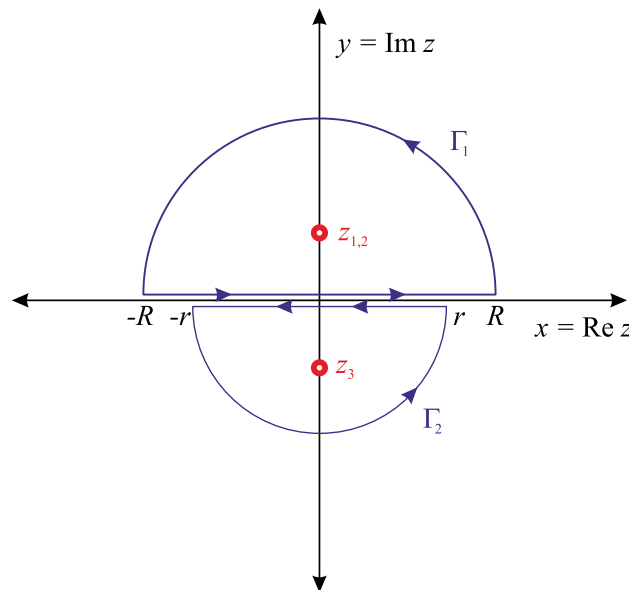
Fourierov originál $y(t)$ funkcie $Y(j\omega)$ bude

$$y(t) = \mathcal{F}_{-1}\{Y(j\omega)\} = \mathcal{F}_{-1}\left\{\frac{1}{(1 + j\omega)(1 + \omega^2)}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{(j\omega + 1)(1 + \omega^2)} d\omega.$$

Na výpočet integrálu použijeme Cauchyho vetu o rezíduách 8.3.1 a Jordanovu lemu 8.4.2, ktoré budeme aplikovať na funkciu

$$\frac{e^{jzt}}{(1 + jz)(1 + z^2)} = \frac{e^{jzt}}{(1 + jz)(j + z)(j - z)} = \frac{e^{jzt}}{j(z - j)^2(z + j)}.$$

Ako vidíme, táto funkcia má dva izolované singulárne body, a to pól 2. rádu $z_{1,2} = j$ a jednoduchý pól 1. rádu $z_3 = -j$.



Obr. 9.3.1: Ku Príkladu 9.9

Integrál vypočítame zvlášť pre kladné $t > 0$, zvlášť pre záporné $t < 0$ a zvlášť pre $t = 0$.

Ak $t > 0$, prevedieme určitý integrál na krivkový po krivke $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = R \cdot e^{j\theta}, \theta \in [0, \pi], R > 1\}$ v $\text{Im } z > 0$, teda

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{(j\omega + 1)(\omega^2 + 1)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{e^{jzt}}{(1+jz)(1+z^2)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi j \text{res}_{z_1,2=j} \left(\frac{e^{jzt}}{(1+jz)(1+z^2)} \right) = j \lim_{z \rightarrow j} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{jzt}}{(1+jz)(1+z^2)} (z-j)^2 \right) \\ &= j \lim_{z \rightarrow j} \frac{d}{dz} \left(-j \frac{e^{jzt}}{j+z} \right) = \lim_{z \rightarrow j} \left(\frac{jte^{jzt}(j+z) - e^{jzt}}{(j+z)^2} \right) = \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{4}e^{-t}. \end{aligned}$$

Ak $t < 0$, prevedieme určitý integrál na krivkový po krivke $\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = r \cdot e^{j\theta}, \theta \in [-\pi, 0], r > 1\}$ v $\text{Im } z < 0$, pričom dostávame

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{(j\omega + 1)(\omega^2 + 1)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_2} \frac{e^{jzt}}{(1+jz)(1+z^2)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi j \text{res}_{z_3=j} \left(\frac{e^{jzt}}{(1+jz)(1+z^2)} \right) = j \lim_{z \rightarrow -j} \left(\frac{e^{jzt}}{(1+jz)(1+z^2)} (z+j) \right) \\ &= j \lim_{z \rightarrow -j} \left(\frac{e^{jzt}}{(1+jz)(j-z)} \right) = j \left(-\frac{1}{4}je^t \right) = \frac{1}{4}e^t. \end{aligned}$$

Ak $t = 0$, prevedieme určitý integrál na krivkový integrál opäť po krivke Γ_1 v $\text{Im } z > 0$, a riešenie má tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega 0}}{(j\omega + 1)(\omega^2 + 1)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{(1+jz)(1+z^2)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi j \text{res}_{z_1,2=j} \left(\frac{1}{(1+jz)(1+z^2)} \right) = j \lim_{z \rightarrow j} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(1+jz)(1+z^2)} (z-j)^2 \right) \\ &= j \lim_{z \rightarrow j} \frac{d}{dz} \left(-j \frac{1}{j+z} \right) = j \lim_{z \rightarrow j} \left(\frac{j}{(z+j)^2} \right) = j \left(-\frac{1}{4}j \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tým dostávame hľadané riešenie diferenciálnej rovnice v tvare

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^t, & \text{pre } t \in (-\infty, 0), \\ \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{4}e^{-t}, & \text{pre } t \in [0, \infty). \end{cases}$$

■

■ **Príklad 9.10** Pomocou Fourierovej transformácie nájdime riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$y''(t) - y(t) = e^{-t^2},$$

pre ktoré platí $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$.

Obe strany diferenciálnej rovnice transformujeme, čím dostávame

$$-\omega^2 Y(j\omega) - Y(j\omega) = \mathcal{F}\{e^{-t^2}\},$$

kde nateraz ponecháme pravú stranu v tvare $\mathcal{F}\{e^{-t^2}\}$. Ďalej vyjadríme Fourierov obraz riešenia

$$-Y(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\{e^{-t^2}\}}{1 + \omega^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(t) &= \begin{cases} 0, & \text{pre } t \in [0, 1], \\ e^{-t} \sin t, & \text{pre } t \in (1, \infty), \end{cases} & \left[\frac{\omega}{\omega \mp j} \frac{1}{z} \right] \Lambda = (\omega) \sin t \\ \text{c) } f(t) &= \begin{cases} \sin t, & \text{pre } t \in [0, \pi], \\ 0, & \text{pre } t \in (\pi, \infty). \end{cases} & \left[\frac{z\omega - 1}{\omega \mp j} \frac{1}{z} \right] \Lambda = (\omega) \sin t \end{aligned}$$

Cvičenie 9.4 Použitím spätnej Fourierovej transformácie nájdite originál $f(t) \in D_{\mathcal{F}}$, ak je dané:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(j\omega) &= \frac{1}{1+\omega^2}, & [|t| - \partial_1^2 = (t) f] \\ \text{b) } F(j\omega) &= \frac{1}{4+\omega^4}. & [(|t| \mp 1 \mp \omega^2) |t| - \partial_1^2 = (t) f] \end{aligned}$$

Cvičenie 9.5 Použitím Fourierovej transformácie nájdite riešenie $y(t)$ danej diferenciálnej rovnice pre $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{a) } y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) &= \frac{1}{2}e^{-|t|}, \text{ pre ktoré platí } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0, \\ &\left[\begin{array}{l} \cdot (\infty, 0) \ni t \text{ and } \cdot t \partial_1^2 + t \partial_1^2 - t \partial_1^2 \\ \cdot 0 = t \text{ and } \cdot t \partial_1^2 - \\ \cdot (0, \infty) \ni t \text{ and } \cdot t \partial_1^2 - \end{array} \right] = (t) \Lambda \\ \text{b) } y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) &= e^{-|t|}, \text{ pre ktoré platí } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0. \\ &\left[\begin{array}{l} \cdot (\infty, 0) \ni t \text{ and } \cdot t \partial_1^2 + t \partial_1^2 - t \partial_1^2 \\ \cdot 0 = t \text{ and } \cdot t \partial_1^2 - \\ \cdot (0, \infty) \ni t \text{ and } \cdot t \partial_1^2 - \end{array} \right] = (t) \Lambda \end{aligned}$$

10. Laplaceova transformácia

10.1 Definícia Laplaceovej transformácie

V predchádzajúcej kapitole sme sa zaoberali Fourierovou transformáciou funkcií. Jednou z požadovaných vlastností, aby funkcia patrila do $D_{\mathcal{F}}$, bola jej absolútna integrovateľnosť, alebo inak, aby platilo $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$. Avšak zďaleka nie všetky elementárne funkcie vyskytujúce sa v technickej praxi túto podmienku spĺňajú.

Uvažujme funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = e^{-st},$$

kde $s \in \mathbb{R}_{>0}$, $t \in \mathbb{R}$. Táto funkcia konverguje pre $t \rightarrow \infty$ k nule dostatočne rýchlo a to až tak, že po jej prenasobení elementárnou funkciou, ktorá pôvodne absolútne integrovateľná nebola, sa ich súčin absolútne integrovateľným stáva. Napr.:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-st} = 0,$$

pre každé $n \in \mathbb{N}^*$ a $s \in \mathbb{R}_{>0}$, ďalej tiež platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{kt} e^{-st} = 0,$$

pre každé $k, s \in \mathbb{R}$, kde $k < s$, a pod.

Problém vzniká pre záporné hodnoty t , keďže napríklad i v okolí bodu $-\infty$ nič z vyššie uvedeného neplatí, nakoľko aj $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-st} = \infty$, pre $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Všetkému sa vyhneme tým, že v ďalšom budeme uvažovať tieto funkcie iba pre $t > 0$ a pre nekladné t ich stotožníme s triviálnou funkciou, t. j. pre $t \leq 0$ bude $f(t) \equiv 0$. V technickej a fyzikálnej praxi sa aj tak so záporným uvažovaním nezávislej premennej (v množstve prípadov) prakticky nestretávame.

Definícia 10.1.1 — Laplaceova transformácia. Nech je daná reálna funkcia $f(t): [0, \infty) \supset D_f \rightarrow \mathbb{R}$.

Potom nevlastný integrál

$$F(s + j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

pri označení $s + j\omega = p$, kde $\operatorname{Re} p = s$ a $\operatorname{Im} p = \omega$,

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt,$$

sa nazýva *Laplaceov integrál* funkcie $f(t)$. Ak množina D_f tých $p \in \mathbb{C}$, pre ktoré tento integrál konverguje, je neprázdna, funkcia $F(p) : D_f \rightarrow \mathbb{C}$ sa nazýva *Laplaceov obraz* funkcie $f(t)$ a túto skutočnosť značíme

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p).$$

Ak pre funkciu $g(t) = e^{-st} \cdot f(t)$ aplikujeme vzťah pre spätnú Fourierovu transformáciu, dostávame

$$e^{-st} \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s + j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

Prenásobením funkciou e^{st} , kde $t \in \mathbb{R}_{>0}$ a $s \in \mathbb{R}_{>0}$ je pevné číslo, bude platiť

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s + j\omega) \cdot e^{(s+j\omega)t} d\omega.$$

Ak $s + j\omega = p$, potom $j d\omega = dp$ a dostávame nevlastný integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej závislý od parametra s

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp,$$

v ktorom integrujeme po priamke $\operatorname{Re} p = s$ rovnobežnej s imaginárnou osou o_y .

■ **Príklad 10.1** Nájdime Laplaceov obraz Heavisideovej funkcie

$$f(t) = H(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } t < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{ak } t = 0, \\ 1, & \text{ak } t > 0. \end{cases}$$

Podľa definície pre $\operatorname{Re} p > 0$ platí

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^a = -\frac{1}{p} \left(\underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-pa}}_{=0} - \underbrace{e^0}_{=1} \right) = \frac{1}{p}.$$

■

■ **Príklad 10.2** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = e^{\alpha t},$$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$ a $t \in [0, \infty)$.

Ak platí $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$, potom

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{-(p-\alpha)} \right]_0^a \\ &= \underbrace{-\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{-(p-\alpha)a}}{p-\alpha}}_{=0} + \frac{e^0}{p-\alpha} = \frac{1}{p-\alpha}. \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 10.3** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = e^{t^2},$$

kde $t \in [0, \infty)$.

Zrejme pre každé $p = s + j\omega \in \mathbb{C}$ a každé $t > t_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ platí

$$|e^{t^2} \cdot e^{-pt}| = e^{t^2} \cdot e^{-pt} > 1.$$

Nakoľko integrál $\int_0^{\infty} 1 dt$ diverguje, bude podľa porovnávacieho kritéria divergovať aj integrál $\int_0^{\infty} e^{t^2} \cdot e^{-pt} dt$.

K funkcii $f(t) = e^{t^2}$ preto neexistuje Laplaceov obraz.

■

V predchádzajúcich príkladoch sme videli, že niektoré funkcie Laplaceov obraz majú a niektoré ho naopak nemajú. Stačí, aby neboli splnené podmienky v ostatných príkladoch a nevlastný integrál diverguje a tým pádom, podľa definície, Laplaceov obraz neexistuje. Nás budú prirodzene zaujímať funkcie, ktoré sú integrovateľné a tento obraz majú. Takéto funkcie budeme nazývať predmet (niekedy tiež vzor alebo originál) štandardného typu.

Definícia 10.1.2 — Laplaceov predmet štandardného typu. Nech reálna funkcia $f(t) : \mathbb{R} \supset D_f \rightarrow \mathbb{R}$ spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. $f(t)$ je na $t \in [0, \infty)$ po častiach spojitá,
2. $f(t) = 0$ pre každé $t < 0$,
3. existuje $M \in \mathbb{R}_{>0}$ také, že pre všetky $t \in [0, \infty)$ platí

$$|f(t)| \leq M e^{st}.$$

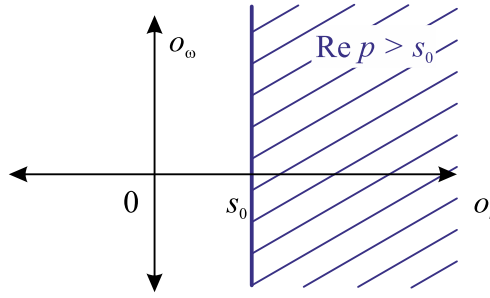
Potom funkciu $f(t)$ nazývame *Laplaceov predmet štandardného typu*.

Triedu všetkých takýchto funkcií označujeme $D_{\mathcal{L}}$.

Reálne číslo $s_0 = \inf \{s \in \mathbb{R} \mid \exists M \in \mathbb{R}_{>0}, t \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq M e^{st}\}$ sa nazýva *exponent rastu funkcie* $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$.



Pre funkcie $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ ohraničené na $t \in \mathbb{R}$ je $s_0 \leq 0$, pre neohraničené $s_0 \geq 0$.

Obr. 10.1.1: Polrovina $\text{Re } p > s_0$

R S prihliadnutím na vlastnosť 2. poslednej definície budeme v nasledujúcom funkciou $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ chápať reálnu funkciu $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) \cdot H(t)$, pričom symbol Heavisideovej funkcie budeme ďalej pre jednoduchosť vynechávať.

Veta 10.1.1 — O Laplaceovom predmete štandardného typu. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ je Laplaceov predmet štandardného typu s exponentom (indexom) rastu s_0 .

Potom existuje Laplaceov obraz

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

a funkcia $F(p) : \mathbb{C} \supset D_F \rightarrow \mathbb{C}$ je na polrovine $\text{Re } p > s_0$ holomorfná.

Dôkaz. Najskôr ukážeme absolútnu konvergenciu integrálu na polrovine $\text{Re } p > s_0$. Funkcia $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$, a teda pre $t \in [0, \infty)$ platí

$$|f(t) \cdot e^{-pt}| \leq M \cdot e^{s_0 t} \cdot e^{-st} \cdot |e^{-j\omega t}| = M e^{-(s-s_0)t}.$$

Pre $s = \text{Re } p > s_0$ je

$$\int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} \right]_0^a = -\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s-s_0)a}}{s-s_0} + \frac{e^0}{s-s_0} = \frac{1}{s-s_0},$$

odkiaľ porovnávacím kritériom dostávame

$$\int_0^{\infty} |f(t) \cdot e^{-pt}| dt \leq \frac{M}{s-s_0},$$

a teda integrál je na $\text{Re } p > s_0$ rovnomerne konvergentný a Laplaceov obraz $F(p)$ je svojím predpisom jednoznačne určený.

Pozrime sa teraz na holomorfnosť funkcie $F(p)$. Funkcia $\varphi(t, p) : t \rightarrow f(t) e^{-pt}$, kde $t \in [0, \infty)$ a $p \in \Omega = \{p \in \mathbb{C} \mid \text{Re } p > s_0\}$ je pri každom pevnom $t \in [0, \infty)$ holomorfnou funkciou premennej p a platí

$$\frac{\partial \varphi(t, p)}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} (f(t) e^{-pt}) = -t f(t) e^{-pt}.$$

Ďalej je $\varphi(t, p)$ po častiach spojitá funkcia premennej $t \in [0, \infty)$ pre každé $p \in \Omega$ a zároveň je spojitá funkcia premennej $p \in \Omega$ pre každé $t \in [0, \infty)$ a integrál $\int_0^{\infty} \varphi(t, p) dt$ konverguje pre ľubovoľné $p \in \Omega$.

Tým pádom je funkcia $F(p) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná predpisom

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

v oblasti Ω holomorfná a platí

$$F'(p) = - \int_0^{\infty} t f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

■

Dôsledok 10.1.2 — Nutná podmienka pre Laplaceov obraz. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ je jej Laplaceov obraz. Potom platí

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

Dôkaz. Pri dôkaze Vety 10.1.1 sme použili odhad

$$|F(p)| = \int_0^{\infty} |f(t) \cdot e^{-pt}| dt \leq \frac{M}{s - s_0},$$

kde pre $s = \operatorname{Re} p \rightarrow \infty$ platí

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{M}{s - s_0} = 0,$$

odkiaľ vyplýva dokazované tvrdenie. ■

10.2 Vlastnosti Laplaceovej transformácie

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať základnými vlastnosťami Laplaceovej transformácie. Formulujeme vety, ktoré budú základným stavebným kameňom pre operátorový počet a uvedieme celý rad príkladov na ich ilustráciu. Tieto príklady nám poskytnú veľké množstvo obrazov funkcií, ktoré sú dôležité a používané v praxi.

Veta 10.2.1 — Linearita. Nech $f_k(t) \in D_{\mathcal{L}}$ s exponentom rastu $s_k \in \mathbb{R}$, nech $\mathcal{L}\{f_k(t)\} = F_k(p)$, $F_k(p) : \Omega_k \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega_k = \{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p > s_k\}$ a nech $c_k \in \mathbb{C}$ pre $k = 1, 2, \dots, n$. Potom

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^n c_k F_k(p),$$

na oblasti $F(p) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega = \{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2, \dots, s_n\}\}$.

Dôkaz. Z vlastností integrálu hneď vyplýva

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right\} = \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^n c_k \int_0^{\infty} f_k(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^n c_k F_k(p).$$

■

■ **Príklad 10.4** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) \equiv k,$$

kde $k \in \mathbb{R}, t \in (0, \infty)$.

Využijeme výsledok Príkladu 10.1 o obraze Heavisideovej funkcie a Vetu 10.2.1 o linearite Laplaceovej transformácie. Potom

$$F(p) = \mathcal{L}\{k\} = \mathcal{L}\{k \cdot H(t)\} = k \cdot \mathcal{L}\{H(t)\} = k \cdot \frac{1}{p} = \frac{k}{p}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

■ **Príklad 10.5** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = \sin bt,$$

kde $b \in \mathbb{R}, b \neq 0, t \in (0, \infty)$.

Funkciu $f(t)$ si prepíšeme pomocou Eulerovho vzorca a použijeme výsledok Príkladu 10.2, teda

$$\begin{aligned} F(p) &= \mathcal{L}\{\sin bt\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j} \left(e^{jbt} - e^{-jbt}\right)\right\} = \frac{1}{2j} \mathcal{L}\{e^{jbt}\} - \frac{1}{2j} \mathcal{L}\{e^{-jbt}\} \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p - jb} - \frac{1}{p + jb}\right) = \frac{1}{2j} \frac{p + jb - p + jb}{p^2 + b^2} = \frac{1}{2j} \frac{2jb}{p^2 + b^2} = \frac{b}{p^2 + b^2} \end{aligned}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

■ **Príklad 10.6** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = \cos bt,$$

kde $b \in \mathbb{R}, b \neq 0, t \in (0, \infty)$.

Obdobne ako vyššie máme

$$\begin{aligned} F(p) &= \mathcal{L}\{\cos bt\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} \left(e^{jbt} + e^{-jbt}\right)\right\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{jbt}\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-jbt}\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - jb} + \frac{1}{p + jb}\right) = \frac{1}{2} \frac{p + jb + p - jb}{p^2 + b^2} = \frac{p}{p^2 + b^2} \end{aligned}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

R Podobne by sme našli Laplaceove obrazy hyperbolických funkcií

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sinh bt\} &= \frac{b}{p^2 - b^2}, \\ \mathcal{L}\{\cosh bt\} &= \frac{p}{p^2 - b^2}, \end{aligned}$$

kde $b \in \mathbb{R}, b \neq 0, t \in (0, \infty)$, v oblasti $\operatorname{Re} p > |b|$.

■ **Príklad 10.7** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = \sin^2 bt,$$

kde $b \in \mathbb{R}, b \neq 0, t \in (0, \infty)$.

Použijeme vzťah pre mocninu goniometrickej funkcie, odkiaľ máme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin^2 bt\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1 - \cos 2bt}{2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2bt\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + (2b)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{p^2 + 4b^2 - p^2}{p(p^2 + 4b^2)} = \frac{2b^2}{p(p^2 + 4b^2)} \end{aligned}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

■ **Príklad 10.8** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = \cos^2 bt,$$

kde $b \in \mathbb{R}, b \neq 0, t \in (0, \infty)$.

Opäť s použitím vzorca pre druhú mocninu goniometrickej funkcie dostávame

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos^2 at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2bt\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + (2b)^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{p^2 + 4b^2 + p^2}{p(p^2 + 4b^2)} \\ &= \frac{p^2 + 2b^2}{p(p^2 + 4b^2)} \end{aligned}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

R Podobne by sme odvodili Laplaceove obrazy druhých mocnín hyperbolických funkcií. Pre ich druhé mocniny platí

$$\begin{aligned} \sinh^2 t &= \frac{\cosh(2t) - 1}{2}, \\ \cosh^2 t &= \frac{\cosh(2t) + 1}{2}. \end{aligned}$$

Analogicky by sme dospeli k záverom, pre $b \in \mathbb{R}, b \neq 0, t \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sinh^2 bt\} &= \frac{2b^2}{p(p^2 - 4b^2)}, \\ \mathcal{L}\{\cosh^2 bt\} &= \frac{p^2 - 2b^2}{p(p^2 - 4b^2)}, \end{aligned}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 2|b|$.

Veta 10.2.2 — Derivovanie originálu.

1. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ je spojitá na $(0, \infty)$, ďalej nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a nech $f'(t) \in D_{\mathcal{L}}$.

Potom

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p \cdot F(p) - f(0^+),$$

kde $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$.

2. Nech funkcie $f(t), f'(t) \in D_{\mathcal{L}}$, nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a nech $f^{(n-1)}(t)$ je spojitá na $(0, \infty)$.

Potom

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n \cdot F(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+),$$

kde $f^{(k)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t)$ pre $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Dôkaz. 1. Integráciou per partes dostávame

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty f'(t)e^{-pt} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} [f(t)e^{-pt}]_0^a + p \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-pt} - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)e^{-pt} + p \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-pt} - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) + p \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Tak, ako sme už ukázali, zrejme platí

$$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{s_0 t} e^{-st} = Me^{-(s-s_0)t},$$

odkiaľ pre $s > s_0$ je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Me^{-(s-s_0)t} = 0,$$

a aj

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-pt} = 0.$$

Preto platí

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) + p \cdot F(p),$$

čo je tvrdením prvej časti vety.

2. Druhá časť tvrdenia vyplýva z prvej metódou úplnej indukcie. ■

Dôsledok 10.2.3 Ak $f(t) \in D\mathcal{L}$ je spojitá na $\mathbb{R}$, potom platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= p \cdot F(p), \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= p^n \cdot F(p). \end{aligned}$$

Dôkaz. Ak je funkcia spojitá na celej množine reálnych čísel a zároveň je Laplaceov predmet štandardného typu, musí platiť

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} f^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f^{(k)}(t) = 0.$$
■

Veta 10.2.4 — Integrovanie originálu. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$.

Potom aj funkcia $g : t \rightarrow \int_0^t f(u) du$ patrí do $D_{\mathcal{L}}$ a pre jej Laplaceov obraz platí

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(p)}{p}.$$

Dôkaz. Tým, že $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$, bude aj funkcia $g(t)$ spĺňať vlastnosť 1. a 2. Definície 10.1.2. Presvedčíme sa, že i funkcia $g(t)$ vyhovuje vlastnosti 3. pre Laplaceov predmet štandardného typu.

Pre $t \in \mathbb{R}_{>0}$ platí

$$|g(t)| = \left| \int_0^t f(u) du \right| \leq \int_0^t |f(u)| du \leq M \int_0^t e^{s_0 u} du = M \left[\frac{e^{s_0 u}}{s_0} \right]_0^t = \frac{M}{s_0} (e^{s_0 t} - 1).$$

Samotné tvrdenie vety odvodíme z Dôsledku 10.2.3, keďže zrejme

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t f(u) du = 0,$$

a teda bude platiť

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = pG(p),$$

kde $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$. Odkiaľ už ľahko vyjadríme

$$G(p) = \frac{1}{p} F(p).$$

■

■ **Príklad 10.9** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = t^n,$$

kde $n \in \mathbb{N}^*$.

Použijúc výsledok Príkladu 10.1 postupne dostávame

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t)\} &= \frac{1}{p}, \\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t H(u) du\right\} &= \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}, \\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t u du\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^3}, \\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{u^2}{2} du\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{t^3}{3 \cdot 2}\right\} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^3} = \frac{1}{p^4}, \\ &\dots \\ \mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} &= \frac{1}{p^{n+1}}. \end{aligned}$$

Odkiaľ ľahko odvodíme

$$\frac{1}{n!} \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{p^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

Veta 10.2.5 — Derivovanie obrazu. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$, nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a nech $n \in \mathbb{N}^*$ je pevné číslo.
Potom platí

$$\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = F^{(n)}(p) = \frac{d^n F(p)}{dp^n}.$$

Dôkaz. V dôkaze Vety 10.1.1 sme dokázali, že pre funkciu $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ v oblasti $\operatorname{Re} p > s_0$ platí

$$F'(p) = - \int_0^{\infty} t f(t) \cdot e^{-pt} dt,$$

teda máme platnosť tvrdenia vety pre $n = 1$

$$\mathcal{L}\{-t f(t)\} = F'(p).$$

Matematickou indukciou dokážeme platnosť pre každé $n \in \mathbb{N}^*$. Nech

$$\mathcal{L}\{(-t)^{n-1} f(t)\} = F^{(n-1)}(p),$$

potom platí

$$\mathcal{L}\{-t(-t)^{n-1} f(t)\} = \frac{d}{dp} \left(F^{(n-1)}(p) \right) = F^{(n)}(p).$$

Teda

$$\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = F^{(n)}(p).$$

■

■ **Príklad 10.10** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = t \cdot \sin bt,$$

kde $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

Z Príkladu 10.5 vieme, že obraz funkcie $f(t) = \sin bt$ je

$$\mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{p^2 + b^2},$$

preto zrejme

$$\mathcal{L}\{t \cdot \sin bt\} = -\frac{d}{dp} \left(\frac{b}{p^2 + b^2} \right) = -\frac{d}{dp} \left(b \cdot (p^2 + b^2)^{-1} \right) = \frac{2bp}{(p^2 + b^2)^2}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

■ **Príklad 10.11** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = t \cdot \cos bt,$$

kde $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

V Príklade 10.6 sme určili obraz funkcie $f(t) = \cos bt$

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{p}{p^2 + b^2},$$

preto zrejme

$$\mathcal{L}\{t \cdot \sin bt\} = -\frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2 + b^2} \right) = \frac{-(p^2 + b^2 - 2p^2)}{(p^2 + b^2)^2} = \frac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

■ **Príklad 10.12** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = t^n \cdot e^{kt},$$

kde $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{C}$.

V Príklade 10.2 sme odvodili pre $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} k$

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{p - k},$$

odkiaľ

$$\mathcal{L}\{(-t)^n \cdot e^{kt}\} = \frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{1}{p - k} \right) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(p - k)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t^n \cdot e^{kt}\} = \frac{n!}{(p - k)^{n+1}}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} k$. ■

Veta 10.2.6 — Integrovanie obrazu. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$, nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a nech $s_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ je exponent (index) rastu funkcie $f(t)$.

Nech funkcia $g : \frac{f(t)}{t} \in D_{\mathcal{L}}$ a jej exponent (index) rastu je $s_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, kde $s_1 \geq s_0$.

Ďalej nech nevlastný integrál

$$\int_p^\infty F(z) dz$$

po ľubovoľnej i neohraničenej krivke začínajúcej v bode p a ležiacej v oblasti $\operatorname{Re} p > s_1 \geq s_0$ konverguje. Potom platí

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^\infty F(z) dz.$$

Dôkaz. Označme $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = G(p)$. Podľa Vety 10.1.1 je funkcia $G(p)$ v oblasti $\operatorname{Re} p > s_1$ holomorfná, a teda existuje jej derivácia. Platí $f(t) = t \cdot \frac{f(t)}{t}$ a pre $t \in (0, \infty)$ podľa Vety 10.2.5 je $\mathcal{L}\{f(t)\} =$

$-G'(p) = F(p)$. Preto funkcia $-G'(p)$ je v oblasti $\operatorname{Re} p > s_1 \geq s_0$ primitívnou funkciou funkcie $F(p)$. Tým pádom platí pre integrál funkcie $F(p)$ po ľubovoľnej po častiach hladkej krivke celej ležiacej v oblasti $\operatorname{Re} p > s_1 \geq s_0$ spájajúcej body p a q

$$\int_p^q F(z) dz = G(p) - G(q).$$

Okrem toho, keďže $g : \frac{f(t)}{t} \in D_{\mathcal{L}}$, je podľa Dôsledku 10.1.2 (Nutná podmienka Laplaceovho obrazu)

$$\lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} G(q) = 0.$$

A teda platí

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = G(p) = \int_p^{\infty} F(z) dz.$$

■

■ **Príklad 10.13** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Už sme použili výsledok Príkladu 10.5

$$\mathcal{L} \{ \sin t \} = \frac{1}{p^2 + 1},$$

čiže pre obraz funkcie $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ zrejme platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{\sin t}{t} \right\} &= \int_p^{\infty} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \lim_{a \rightarrow \infty} [\arctan z]_p^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan a - \arctan p = \frac{\pi}{2} - \arctan p \\ &= \operatorname{arccot} p \end{aligned}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$.

■

Veta 10.2.7 — Prvá limitná. Nech $f(t), f'(t) \in D_{\mathcal{L}}$, nech $\mathcal{L} \{ f(t) \} = F(p)$ a nech $f(t)$ je spojitá na intervale $(0, \infty)$.

Potom platí

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+).$$

Dôkaz. Z Vety 10.2.2 o derivovaní originálu platí

$$\mathcal{L} \{ f'(t) \} = p \cdot F(p) - f(0^+).$$

Ďalej na základe Dôsledku 10.1.2 musí preň ako pre obraz Laplaceovho štandardného predmetu platiť

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (p \cdot F(p) - f(0^+)) = 0.$$

Odkiaľ dostaneme požadované tvrdenie

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0^+).$$

■

Veta 10.2.8 — Druhá limitná. Nech $f(t), f'(t) \in D_{\mathcal{L}}$, nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a nech $f(t)$ je spojitá na intervale $(0, \infty)$.

Potom, ak existuje konečná $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq \infty$, platí

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Dôkaz. Opäť z Vety 10.2.2 o derivovaní originálu

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p \cdot F(p) - f(0^+).$$

Teda podľa definície Laplaceovej transformácie máme

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-pt} dt = p \cdot F(p) - f(0^+).$$

Taktiež

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \lim_{p \rightarrow 0} f'(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Potom

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot F(p) - f(0^+)) = \int_0^{\infty} f'(t) dt = [f(t)]_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^+),$$

odkiaľ, pri predpoklade konečnosti limity $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq \infty$, dostávame

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

■

Veta 10.2.9 — Podobnosť. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$, nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a nech $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ je dané číslo.

Potom aj funkcia $g : t \rightarrow f(kt)$ patrí do $D_{\mathcal{L}}$ a pre jej Laplaceov obraz platí

$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k} \cdot F\left(\frac{p}{k}\right).$$

Dôkaz. Do vzťahu definície Laplaceovej transformácie zavedieme substitúciu $u = kt$

$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \int_0^{\infty} f(kt) e^{-pt} dt = \int_{\substack{u=kt \\ t=0 \parallel 0 \parallel \infty \\ u=0 \parallel 0 \parallel \infty}}^{\substack{u=kt \\ du=kd \\ t=0 \parallel 0 \parallel \infty}} \left/ \frac{du}{k} \right/ = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} f(u) e^{-p \frac{u}{k}} du = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right).$$

■

■ **Príklad 10.14** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = \cos \frac{t}{a},$$

kde $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Na základe výsledku Príkladu 10.6 a Vety 10.2.9 o podobnosti máme

$$\mathcal{L}\left\{\cos \frac{t}{a}\right\} = \mathcal{L}\left\{\cos \frac{1}{a}t\right\} = \frac{1}{\frac{1}{a}} \cdot \frac{ap}{(ap)^2 + 1} = \frac{a^2 p}{a^2 p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \frac{1}{a^2}}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

Veta 10.2.10 — Posunutie argumentu. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$, nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a nech je dané číslo $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Potom $f(t - \tau) \in D_{\mathcal{L}}$ a $f(t + \tau) \in D_{\mathcal{L}}$ a platí

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} &= e^{-\tau p} \cdot F(p), \\ \mathcal{L}\{f(t + \tau)\} &= e^{\tau p} \cdot \left(F(p) - \int_0^{\tau} f(t) \cdot e^{-pt} dt \right).\end{aligned}$$

Dôkaz. Lahko sa presvedčíme, že obe funkcie spĺňajú vlastnosti 1., 2. až 3. Definície 10.1.2. Overíme teda obe tvrdenia na základe definície Laplaceovej transformácie, t. j.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} &= \int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_{\substack{t \\ w = t - \tau \\ w \parallel -\tau}}^{\substack{\infty \\ 0 \\ \infty}} f(w) e^{-p(\tau + w)} dw \\ &= e^{-\tau p} \left(\underbrace{\int_{-\tau}^0 f(w) e^{-pw} dw}_{=0 \Leftrightarrow \text{Def. 10.1.2: vl. 2.}} + \int_0^{\infty} f(w) e^{-pw} dw \right) = e^{-\tau p} F(p).\end{aligned}$$

Druhé tvrdenie dokazujeme podobným spôsobom

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t + \tau)\} &= \int_0^{\infty} f(t + \tau) e^{-pt} dt = \int_{\substack{t \\ w = t + \tau \\ w \parallel \tau}}^{\substack{\infty \\ 0 \\ \infty}} f(w) e^{-p(\tau - w)} dw \\ &= e^{-\tau p} \left(\int_0^{\infty} f(w) e^{-pw} dw - \int_{-\tau}^0 f(w) e^{-pw} dw \right) = e^{\tau p} \left(F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right).\end{aligned}$$

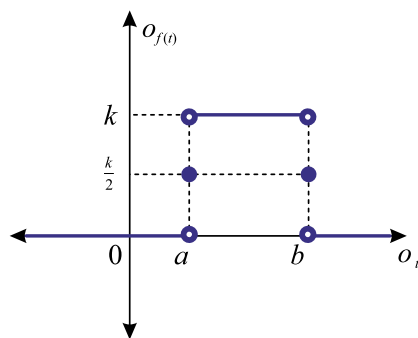
■

■ **Príklad 10.15** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pre } t \notin [a, b], \\ \frac{k}{2}, & \text{pre } t = a \wedge t = b, \\ k, & \text{pre } t \in (a, b). \end{cases}$$

Funkciu tohto typu (tzv. skoková funkcia) je vhodné si prepísať použitím Heavisideovej funkcie

$$f(t) = k \cdot H(t - a) - k \cdot H(t - b).$$



Obr. 10.2.1: K Príkladu 10.15

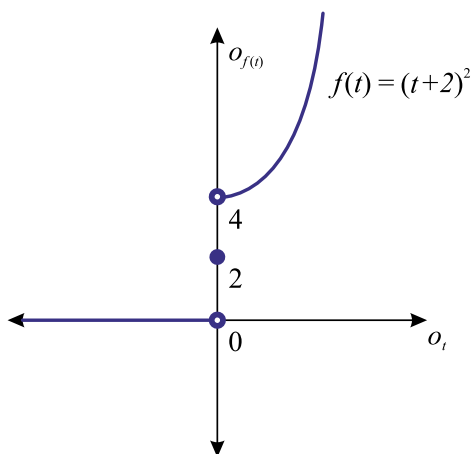
Laplaceov obraz tejto funkcie určíme podľa prvého tvrdenia Vety 10.2.10 a výsledku Príkladu 10.1

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{kH(t-a) - kH(t-b)\} = k\mathcal{L}\{H(t-a)\} - k\mathcal{L}\{H(t-b)\} \\ &= ke^{-ap}\frac{1}{p} - ke^{-bp}\frac{1}{p} = \frac{k}{p}(e^{-ap} - e^{-bp})\end{aligned}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

■ **Príklad 10.16** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = \begin{cases} (t+2)^2, & \text{pre } t > 0, \\ 2, & \text{pre } t = 0, \\ 0, & \text{pre } t < 0. \end{cases}$$



Obr. 10.2.2: K Príkladu 10.16

Z Príkladu 10.9 dostávame

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{p^3},$$

a teda podľa druhého tvrdenia Vety 10.2.10 o posunutí argumentu platí

$$\mathcal{L}\{(t+2)^2\} = e^{2p} \left(\frac{2}{p^3} - \int_0^2 t^2 e^{-pt} dt \right).$$

Integrál v zátvorke si vypočítame zvlášť, a teda

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 t^2 e^{-pt} dt &= \left/ \begin{array}{l} u = t^2 \quad u' = 2t \\ v' = e^{-pt} \quad v = \frac{e^{-pt}}{-p} \end{array} \right/ = \left[-t^2 \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^2 + \frac{2}{p} \int_0^2 t e^{-pt} dt \\
 &= \frac{-4e^{-2p}}{p} + \frac{2}{p} \left/ \begin{array}{l} u = t \quad u' = 1 \\ v' = e^{-pt} \quad v = \frac{e^{-pt}}{-p} \end{array} \right/ \\
 &= \frac{-4e^{-2p}}{p} + \frac{2}{p} \left[\frac{te^{-pt}}{-p} \right]_0^2 + \frac{2}{p^2} \int_0^2 e^{-pt} dt \\
 &= \frac{-4e^{-2p}}{p} - \frac{4e^{-2p}}{p^2} + \frac{2}{p^2} \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^2 = \frac{-4e^{-2p}}{p} - \frac{4e^{-2p}}{p^2} - \frac{2e^{-2p}}{p^3} + \frac{2}{p^3}.
 \end{aligned}$$

Odkiaľ pre hľadaný obraz funkcie $f(t)$ dostávame

$$\mathcal{L}\{(t+2)^2\} = e^{2p} \left(\frac{2}{p^3} - \int_0^2 t^2 e^{-pt} dt \right) = \left(\frac{4}{p} + \frac{4}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right) = \mathcal{L}\{t^2 + 4t + 4\}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$.

Všimnime si, že totožný výsledok dostávame, ak funkciu $f(t)$ upravíme roznásobením

$$\mathcal{L}\{(t+2)^2\} = \mathcal{L}\{t^2 + 4t + 4\} = \frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p}.$$

■

Veta 10.2.11 — O obraze periodického originálu. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ je periodická funkcia s periódou $T \in \mathbb{R}_{>0}$.

Potom platí

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Dôkaz. Podľa definície Laplaceovej transformácie je

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{f(t)\} &= F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt + \int_T^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \\
 &= \int_0^T f(t) e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} \underbrace{f(t+T)}_{=f(t)} e^{-p(t+T)} dt = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} e^{-pT} dt \\
 &= \int_0^T f(t) e^{-pt} dt + e^{-pT} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt + e^{-pT} \cdot F(p),
 \end{aligned}$$

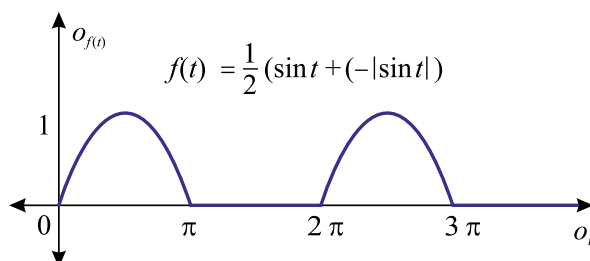
odkiaľ dostávame

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt.$$

■

■ **Príklad 10.17** Nájdime Laplaceov obraz periodickej funkcie

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{pre } t \in [2n\pi, (2n+1)\pi], n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{inde.} \end{cases}$$



Obr. 10.2.3: K Príkladu 10.17

Funkcia $f(t)$ je periodickou funkciou a jej periódou je $T = 2\pi$. Nenulovou je však iba na párnych násobkoch intervalu $[0, \pi]$, všade inde je identicky rovná nule. Pre jej Laplaceov obraz preto platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left(\int_0^{\pi} \sin(t) \cdot e^{-pt} dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot e^{-pt} dt \right) \\ &= \left/ \begin{array}{l} u = \sin t \quad u' = \cos t \\ v' = e^{-pt} \quad v = \frac{e^{-pt}}{-p} \end{array} \right/ = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left(\underbrace{\left[\frac{e^{-pt}}{-p} \sin t \right]_0^{\pi}}_{=0} + \int_0^{\pi} \frac{e^{-pt}}{p} \cos t dt \right) \\ &= \left/ \begin{array}{l} u = \cos t \quad u' = -\sin t \\ v' = \frac{e^{-pt}}{p} \quad v = \frac{e^{-pt}}{-p^2} \end{array} \right/ = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left(\left[\frac{e^{-pt}}{-p^2} \cos t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{e^{-pt}}{p^2} \sin t dt \right). \end{aligned}$$

Z danej rovnosti nám pre hľadaný integrál vyplýva rovnosť

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left(1 + \frac{1}{p^2} \right) \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot e^{-pt} dt &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left[\frac{e^{-pt}}{-p^2} \cos t \right]_0^{\pi}, \\ \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left(\frac{p^2 + 1}{p^2} \right) \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot e^{-pt} dt &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left(\frac{e^{-p\pi}}{-p^2} (-1) + \frac{1}{p^2} \right), \\ \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left(\frac{p^2 + 1}{p^2} \right) \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot e^{-pt} dt &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left(\frac{e^{-p\pi} + 1}{p^2} \right), \quad / \cdot p^2 \\ \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} (p^2 + 1) \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot e^{-pt} dt &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} (e^{-p\pi} + 1), \quad / \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \\ \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot e^{-pt} dt &= \frac{1}{p^2 + 1} \frac{1 + e^{-p\pi}}{(1 + e^{-p\pi})(1 - e^{-p\pi})}, \\ \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot e^{-pt} dt &= \frac{1}{p^2 + 1} \frac{1}{1 - e^{-p\pi}}. \end{aligned}$$

A teda Laplaceov obraz zadanej funkcie je

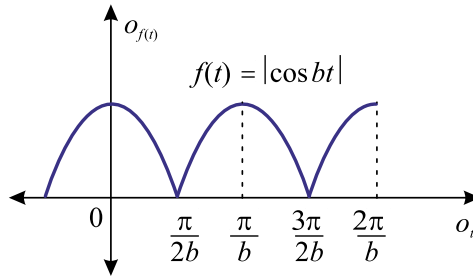
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2 + 1} \frac{1}{1 - e^{-p\pi}}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

■ **Príklad 10.18** Nájdime Laplaceov obraz periodickej funkcie

$$f(t) = |\cos bt|,$$

kde $b \in \mathbb{R}_{>0}$.



Obr. 10.2.4: K Príkladu 10.18

Daná funkcia je periodickou funkciou s periódou $T = \frac{\pi}{b}$ a pre jej Laplaceov obraz bude teda platiť

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{|\cos bt|\} &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}} \int_0^{\frac{\pi}{b}} f(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}} \int_0^{\frac{\pi}{b}} \cos(bt) \cdot e^{-pt} dt \\ &= \left/ \begin{array}{ll} u = \cos bt & u' = -b \sin bt \\ v' = e^{-pt} & v = \frac{e^{-pt}}{-p} \end{array} \right/ \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}} \left(\left[\frac{e^{-pt}}{-p} \cos bt \right]_0^{\frac{\pi}{b}} - \frac{b}{p} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{-pt} \sin bt \right) \\ &= \left/ \begin{array}{ll} u = \sin bt & u' = b \cos bt \\ v' = e^{-pt} & v = \frac{e^{-pt}}{-p} \end{array} \right/ \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}} \left(\frac{e^{-\frac{\pi p}{b}}}{-p} (-1) + \frac{1}{p} - \frac{b}{p} \left(\underbrace{\left[\frac{e^{-pt}}{-p} \sin bt \right]_0^{\frac{\pi}{b}}}_{=0} + \frac{b}{p} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{-pt} \cos bt dt \right) \right) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}} \left(\frac{1}{p} \left(e^{-\frac{\pi p}{b}} + 1 \right) - \frac{b^2}{p^2} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{-pt} \cos bt dt \right), \end{aligned}$$

odkiaľ

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}} \int_0^{\frac{\pi}{b}} \cos(bt) \cdot e^{-pt} dt &= \frac{1}{p} \frac{1 + e^{-\frac{\pi p}{b}}}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}} \frac{b^2}{p^2} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{-pt} \cos bt dt, \\ \left(1 + \frac{b^2}{p^2}\right) \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}} \int_0^{\frac{\pi}{b}} \cos(bt) \cdot e^{-pt} dt &= \frac{1}{p} \frac{1 + e^{-\frac{\pi p}{b}}}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}}, \\ \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}} \int_0^{\frac{\pi}{b}} \cos(bt) \cdot e^{-pt} dt &= \frac{p}{p^2 + b^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi p}{b}}}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}}. \end{aligned}$$

Hľadaný Laplaceov obraz teda je

$$\mathcal{L}\{|\cos bt|\} = \frac{p}{p^2 + b^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi p}{b}}}{1 - e^{-\frac{\pi p}{b}}} = \frac{p}{p^2 + b^2} \coth \frac{\pi p}{2b}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

Veta 10.2.12 — **O „tľmení“ originálu.** Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a nech $\alpha \in \mathbb{C}$ je dané číslo.

Potom platí

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} \cdot f(t)\} = F(p - \alpha).$$

Dôkaz. Z definície Laplaceovej transformácie dostávame

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-\alpha)t} dt = F(p - \alpha).$$

■

■ **Príklad 10.19** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = \sin^2 bt,$$

kde $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

Laplaceov obraz tejto funkcie sme už našli v Prípade 10.7, teraz sa však pozrieme na problematiku inou optikou. Upravme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin^2 bt\} &= \mathcal{L}\{(\sin bt)(\sin bt)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j} (e^{jbt} - e^{-jbt}) \cdot \sin bt\right\} \\ &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}\left\{(e^{jbt} \sin bt - e^{-jbt} \sin bt)\right\} = \frac{1}{2j} \left(\frac{b}{(p - jb)^2 + b^2} - \frac{b}{(p + jb)^2 + b^2}\right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{b}{p^2 - j2pb} - \frac{b}{p^2 + j2pb}\right) = \frac{1}{2j} \frac{4jb^2}{p^3 + 4b^2p} = \frac{2b^2}{p(p^2 + 4b^2)} \end{aligned}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$, čo je v zhode s výsledkom Príkladu 10.7. ■

■ **Príklad 10.20** Nájdime Laplaceov obraz funkcie

$$f(t) = \sin bt \cosh bt,$$

kde $b \in \mathbb{C}, b \neq 0$.

Podobne ako v predchádzajúcom príklade

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin bt \cosh bt\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j} (e^{jbt} - e^{-jbt}) \cdot \cosh bt\right\} = \frac{1}{2j} (e^{jbt} \cosh bt - e^{-jbt} \cosh bt) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{p - jb}{(p - jb)^2 - b^2} - \frac{p + jb}{(p + jb)^2 - b^2} \right) = \frac{b(p^2 + 2b^2)}{p^4 + 4b^4} \end{aligned}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$. ■

R Jednoduchým spôsobom by sme odvodili obrazy nasledujúcich „tlmených“ funkcií.
Obraz „tlmenej“ mocninovej funkcie je

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} t^n\} = \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}},$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$.

Obrazy „tlmených“ goniometrických funkcií sú

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{\alpha t} \sin bt\} &= \frac{b}{(p - \alpha)^2 + b^2}, \\ \mathcal{L}\{e^{\alpha t} \cos bt\} &= \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + b^2}, \end{aligned}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

Obrazy „tlmených“ hyperbolických funkcií sú

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{\alpha t} \sinh bt\} &= \frac{b}{(p - \alpha)^2 - b^2}, \\ \mathcal{L}\{e^{\alpha t} \cosh bt\} &= \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 - b^2}, \end{aligned}$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > \max\{\alpha + b, \alpha - b\}$, kde $\alpha, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

V predchádzajúcej kapitole venujúcej sa Fourierovej transformácii sme si definovali konvolučný súčin funkcií. Takisto v prípade Laplaceovej transformácie bude mať toto zobrazenie dôležitý význam, keďže nám dáva odpoveď na otázku, čomu zodpovedá jednoduchý súčin obrazov funkcií na strane ich originálov. V prípade Laplaceovej transformácie musíme však túto definíciu do istej miery upraviť a to nasledujúcim spôsobom.

Pri Laplaceovej transformácii sú funkcie zápornej premennej identicky rovné nule, t. j. $f(t - \tau) \equiv 0$ pre $t - \tau < 0 \Leftrightarrow \tau > t$ a tiež $g(\tau) \equiv 0$ pre $\tau < 0$.

Definícia 10.2.1 — Konvolučný súčin pre Laplaceovu transformáciu. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a nech $g(t) \in D_{\mathcal{L}}$.

Potom konvolučný súčin týchto dvoch funkcií je

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau.$$

R I takto definovaná konvolúcia funkcií má vlastnosti vyplývajúce z vlastností určitého integrálu, ktoré sme si dokázali pri Fourierovej transformácii, teda komutatívnosť, asociatívnosť a distributívnosť vzhľadom na sčítanie. Ich dôkaz by bol analogický.

■ **Príklad 10.21** Nájdime konvolučný súčin funkcií patriacich do $D_{\mathcal{L}}$:

1. $f(t) = e^t, g(t) = \sin t,$
2. $f(t) = e^t, g(t) = \cos t,$
3. $f(t) = \cos t, g(t) = \cos t,$
4. $f(t) = t, g(t) = e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{C},$
5. $f(t) = \sin bt, g(t) = \sin bt, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

1. Podľa definície

$$\begin{aligned} (\exp * \sin)(t) &= \int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau = \left/ \begin{array}{ll} u = \sin \tau & u' = \cos \tau \\ v' = e^{t-\tau} & v = \frac{e^{t-\tau}}{-1} \end{array} \right/ \\ &= [-e^{t-\tau} \sin \tau]_0^t + \int_0^t e^{t-\tau} \cos \tau d\tau = \left/ \begin{array}{ll} u = \cos \tau & u' = -\sin \tau \\ v' = e^{t-\tau} & v = \frac{e^{t-\tau}}{-1} \end{array} \right/ \\ &= -\sin t - [e^{t-\tau} \cos \tau]_0^t - \int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau \\ &= -\sin t - \cos t + e^t - \int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau. \end{aligned}$$

Odkiaľ zrejme platí

$$(\exp * \sin)(t) = \int_0^t e^{t-\tau} \cdot \sin \tau d\tau = \frac{1}{2} (-\sin t - \cos t + e^t).$$

2. Ekvivalentným postupom

$$\begin{aligned} (\exp * \cos)(t) &= \int_0^t e^{t-\tau} \cos \tau d\tau = \left/ \begin{array}{ll} u = \cos \tau & u' = -\sin \tau \\ v' = e^{t-\tau} & v = \frac{e^{t-\tau}}{-1} \end{array} \right/ \\ &= [-e^{t-\tau} \cos \tau]_0^t - \int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau = \left/ \begin{array}{ll} u = \sin \tau & u' = \cos \tau \\ v' = e^{t-\tau} & v = \frac{e^{t-\tau}}{-1} \end{array} \right/ \\ &= -\cos t + e^t + [e^{t-\tau} \sin \tau]_0^t - \int_0^t e^{t-\tau} \cos \tau d\tau \\ &= -\cos t + e^t + \sin t - \int_0^t e^{t-\tau} \cos \tau d\tau. \end{aligned}$$

Odkiaľ pre konvolučný súčin platí

$$(\exp * \cos)(t) = \int_0^t e^{t-\tau} \cdot \cos \tau d\tau = \frac{1}{2} (-\cos t + e^t + \sin t).$$

3. Takisto podľa definície

$$\begin{aligned} (\cos * \cos)(t) &= \int_0^t \cos(t-\tau) \cos \tau d\tau = \int \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) / \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(t-2\tau) + \cos t) d\tau = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \sin(t-2\tau) + \tau \cos t \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} (\sin(-t) - \sin t) + t \cos t \right) = \frac{1}{2} (t \cos t + \sin t). \end{aligned}$$

4. Podobne

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t (t-\tau) \cdot e^{\alpha\tau} d\tau = \int \frac{u}{v'} = \frac{t-\tau}{e^{\alpha\tau}} \quad \begin{matrix} u' = -1 \\ v' = e^{\alpha\tau} \end{matrix} / \\ &= \left[\frac{(t-\tau)e^{\alpha\tau}}{\alpha} \right]_0^t + \int_0^t \frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha} d\tau = -\frac{t}{\alpha} + \left[\frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha^2} \right]_0^t = \frac{1}{\alpha^2} (e^{\alpha t} - \alpha t - 1). \end{aligned}$$

5. Obdobne ako v 3. prípade

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t \sin b(t-\tau) \cdot \sin b\tau d\tau = \int \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) / \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} (\cos b(t-2\tau) - \cos bt) d\tau = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin b(t-2\tau)}{-2b} - \tau \cos bt \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin b(-t)}{-2b} - \frac{\sin bt}{-2b} - t \cos bt \right) = \frac{\sin bt}{2b} - \frac{t \cos bt}{2}. \end{aligned}$$

■

Veta 10.2.13 — Borelova veta. Nech $f(t), g(t) \in D_{\mathcal{L}}$, a nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ v oblasti $\operatorname{Re} p > s_1$ a $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$ v oblasti $\operatorname{Re} p > s_2$, kde s_1 a s_2 sú exponenty (indexy) rastu funkcií $f(t)$ a $g(t)$.

Potom aj $(f * g)(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a platí

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(p) \cdot G(p)$$

v oblasti $\operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2\}$.

Dôkaz. Označme si konvolučnú funkciu $k(t) = (f * g)(t)$. Táto funkcia zrejme spĺňa vlastnosti 1. a 2. Vety 10.1.1 pre originál Laplaceovej transformácie. Pre $t \in (0, \infty)$ dokážeme vlastnosť 3. Zrejme

$$|k(t)| = \left| \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(t-\tau)| |g(\tau)| d\tau \leq \int_0^t M_1 e^{s_1(t-\tau)} M_2 e^{s_2\tau} d\tau.$$

Nech $s_1 > s_2$ a označíme $M_0 = M_1 \cdot M_2$, potom

$$|k(t)| \leq M_0 \int_0^t e^{s_1 t} e^{-(s_1-s_2)\tau} d\tau < M_0 t e^{s_1 t} = M_0 t e^{-at} e^{(s_1-a)t},$$

kde $a \in \mathbb{R}_{>0}$ je ľubovoľné kladné číslo.

Jediným maximom funkcie $t \rightarrow M_0 t e^{at}$ na $[0, \infty)$ je $M > 0$, preto pre všetky $t \in [0, \infty)$ platí $|k(t)| < M e^{(s_1-a)t}$, odkiaľ $|k(t)| < M e^{s_1 t}$. Tým pádom spĺňa funkcia $k(t) = (f * g)(t)$ vlastnosť 3. Vety 10.1.1 a preto $k(t) \in D_{\mathcal{L}}$.

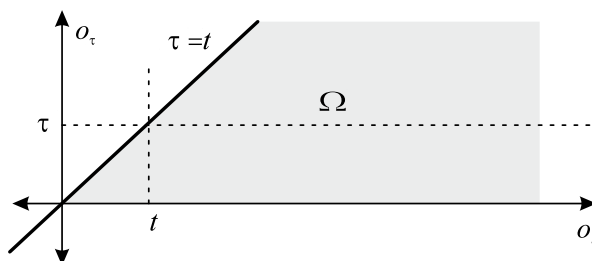
Overíme platnosť tvrdenia vety, ako zvyčajne v ostatných dôkazoch budeme vychádzať priamo z definície obrazu Laplaceovej transformácie. Potom

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt,$$

čo je dvojnásobný integrál cez oblasť

$$\Omega = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, \infty), \tau \in [0, t]\},$$

ktorý je absolútne konvergentný v oblasti $\operatorname{Re} p > s_1 > s_2$, podľa Vety 10.1.1, čo sme dokázali v prvej časti dôkazu. Sú teda splnené predpoklady na zmenu poradia integrovania v oblasti



Obr. 10.2.5: K Dôkazu Borelovej vety 10.18

$$\Omega = \{(\tau, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \tau \in [0, \infty), t \in [\tau, \infty)\},$$

čím dostávame

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(f * g)(t)\} &= \int_0^\infty g(\tau) d\tau \int_\tau^\infty f(t-\tau) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^\infty g(\tau) d\tau \int_0^\infty f(w) e^{-p(\tau+w)} dw \\ &= \int_0^\infty g(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty f(w) e^{-pw} dw = F(p) \cdot G(p). \end{aligned}$$

■

Veta 10.2.14 — Duhamelov vzorec. Nech $f(t), f'(t), g(t) \in D_{\mathcal{L}}$, nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$ a nech $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) < \infty$.

Potom platí

$$pF(p)G(p) = \mathcal{L}\{f(0^+)g(t) + (f' * g)(t)\}.$$

Dôkaz. Vyjadríme si súčin $pF(p)G(p)$ nasledujúcim spôsobom

$$pF(p)G(p) = \left(\underbrace{pF(p) - f(0^+)}_{\mathcal{L}\{f'(t)\}, \text{Veta 10.2.2}} \right) G(p) + f(0^+) \underbrace{G(p)}_{\mathcal{L}\{g(t)\}}.$$

Použitím Borelovej vety dostávame

$$(pF(p) - f(0^+))G(p) = \mathcal{L}\{(f' * g)(t)\} = \int_0^t f'(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Odkiaľ už vyplýva tvrdenie dokazovanej vety. ■

R Duhamelov vzorec sa niekedy uvádza v tvare

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{-1}\{pF(p)G(p)\} &= f(0^+)g(t) + (f' * g)(t) \\ &= f(0^+)g(t) + \int_0^t f'(t - \tau)g(\tau) d\tau \\ &= f(0^+)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

■ **Príklad 10.22** Použitím Borelovej vety alebo Duhamelovho vzorca nájdime originál $f(t)$ Laplaceových obrazov $F(p)$ v oblastiach, v ktorých sú definované:

1. $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)^2},$
2. $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)},$
3. $F(p) = \frac{1}{p^2(p-3)},$
4. $F(p) = \frac{b^2}{(p^2+b^2)^2},$ kde $b \in \mathbb{R},$
5. $F(p) = \frac{p^2}{(p-1)(p^2+1)},$
6. $F(p) = \frac{1}{p^3(p^2+1)}.$

1. Obraz rozpíšeme na súčin elementárnych funkcií, pričom originálom súčinu funkcií bude podľa Borelovej vety ich konvolúcia (využijeme výsledok Príkladu 10.21 - 3.)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{p^2}{(p^2+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}_{-1}\left\{\left(\frac{p}{p^2+1}\right)^2\right\} = \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1}\right\} \\ &= (\cos * \cos)(t) = \frac{1}{2}(t \cos t + \sin t). \end{aligned}$$

2. Podobne pri využití výsledku Príkladu 10.21 - 1.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p^2+1}\right\} = (\exp * \sin)(t) \\ &= \frac{1}{2}(-\sin t - \cos t + e^t). \end{aligned}$$

3. Využijeme výsledok Príkladu 10.21 - 4.

$$\mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p-3)}\right\} = \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-3}\right\} = t * e^{3t} = \frac{1}{9}(e^{3t} - 3t - 1).$$

4. Na základe výsledku Príkladu 10.21 - 5,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b^2}{(p^2 + b^2)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b}{p^2 + b^2} \cdot \frac{b}{p^2 + b^2} \right\} = \sin bt * \sin bt = \frac{\sin bt}{2b} - \frac{t \cos bt}{2}.$$

5. Použitím Duhamelovho vzorca, pre funkcie

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{p-1} = F(p),$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{p}{p^2 + 1} = G(p),$$

kde platí

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^t = 1,$$

pričom derivácia funkcie je

$$f'(t) = e^t,$$

dostávame, využijúc výsledok Príkladu 10.21 - 2.,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{(p-1)(p^2+1)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ p \frac{1}{p-1} \frac{p}{p^2+1} \right\} = 1 \cdot \cos t + (\exp * \cos)(t) \\ &= \cos t + \frac{1}{2} (-\cos t + e^t + \sin t) = \frac{1}{2} (\cos t + e^t + \sin t). \end{aligned}$$

6. Opäť použijeme Duhamelov vzorec, pre

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^3}{6}\right\} = \frac{1}{p^4} = F(p),$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2 + 1} = G(p),$$

kde zrejme $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3}{6} = 0$ a tiež $f'(t) = \left(\frac{t^3}{6}\right)' = \frac{t^2}{2}$, z čoho po dosadení

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^3(p^2+1)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ p \frac{1}{p^4} \frac{1}{p^2+1} \right\} = 0 \cdot \sin t + \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 \sin \tau d\tau \\ &= \left/ \begin{array}{l} u = (t-\tau)^2 \quad u' = -2(t-\tau) \\ v' = \sin \tau \quad v = -\cos \tau \end{array} \right/ \\ &= \frac{1}{2} \left[(t-\tau)^2 (-\cos \tau) \right]_0^t - \int_0^t (t-\tau) \cos \tau d\tau \\ &= \left/ \begin{array}{l} u = (t-\tau) \quad u' = -1 \\ v' = \cos \tau \quad v = \sin \tau \end{array} \right/ \\ &= \frac{t^2}{2} - [(t-\tau) \sin \tau]_0^t - \int_0^t \sin \tau d\tau \\ &= \frac{t^2}{2} - [-\cos \tau]_0^t = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1. \end{aligned}$$

■

10.3 Spätná Laplaceova transformácia

Pozornému čitateľovi iste neunikol fakt, že sme sa doteraz vyhli akejkoľvek forme definície pojmu inverznej Laplaceovej transformácie. Síce sme v predchádzajúcich príkladoch hľadali Laplaceove originály k zadaným

obrazom, ale išlo len o využitie dôsledku Borelovej vety. Viedol nás k tomu fakt, že celá táto problematika si vyžaduje istý aparát, ktorý by nám definíciu tejto transformácie umožnil. My sa samotnému dôkazu predmetnej vety skutočne vyhneme, pretože je na pomery tejto publikácie príliš rozsiahly, a obmedzíme sa na jeho náčrt.

Je pochopiteľné očakávať, nakoľko ide o integrálnu transformáciu, že podobne ako pri Fourierovej transformácii bude i spätná Laplaceova transformácia mať integrálny tvar. Týmto smerom sa bude uberať i naša nasledujúca úvaha.

Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ má po častiach spojitú deriváciu, nech s_0 je jej exponent (index) rastu, potom zrejme pre $t \in \mathbb{R}_{>0}$, pre pevne zvolené $p = s + j\omega$, $s > s_0$ a $\omega \in \mathbb{R}$, pre Laplaceov obraz funkcie $f(t)$ platí

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = F(s + j\omega) = \int_0^{\infty} (f(t) e^{-st}) e^{-j\omega t} dt.$$

Integrál na pravej strane je obrazom Fourierovej transformácie funkcie $t \rightarrow f(t) e^{-st}$ v bode ω , teda

$$F(s + j\omega) = \mathcal{F}\{f(t) e^{-st}\}(\omega).$$

Teraz použijeme vzťah pre spätnú Fourierovu transformáciu na funkciu $f(t) e^{-st}$, čím dostávame

$$f(t) e^{-st} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

pre všetky $t > 0$. Odkiaľ pre násobením e^{st} máme

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s + j\omega) e^{st} e^{j\omega t} d\omega.$$

Takýmto spôsobom sme získali integrálne vyjadrenie vzoru $f(t)$ pomocou obrazu $F(p)$. Tento integrál môžeme interpretovať ako krivkový integrál po priamke $\operatorname{Re} p = s$. Zvolíme najskôr vertikálnu úsečku Γ_{ω} z bodu $s - jR$ do bodu $s + jR$, kde $R > 0$. Parametrizácia tejto úsečky je

$$\Gamma_{\omega} : \gamma(\omega) = s + j\omega, \quad \omega \in [-R, R].$$

Integráciou v zmysle uvedenej parametrizácie (zdola nahor) dostávame

$$\int_{\Gamma_{\omega}} F(p) e^{pt} dp = \int_{-R}^R F(s + j\omega) e^{st} e^{j\omega t} j d\omega,$$

preto

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_{\omega}} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R F(s + j\omega) e^{st + j\omega t} d\omega.$$

Limitou $R \rightarrow \infty$ prevedieme integrál po úsečke Γ_{ω} na integrál po priamke $\Gamma_{\operatorname{Re} p=s}$, ktorej parametrizácia je

$$\Gamma_{\operatorname{Re} p=s} : \gamma(\omega) = s + jt, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

čím dostávame vzťah známy ako *Riemannov-Mellinov vzorec*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_{\operatorname{Re} p=s}} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

Na rozdiel od spätnej Fourierovej transformácie vyžaduje predchádzajúci vzťah integráciu cez kolmicu na reálnu os. Preto Riemannov-Mellinov vzorec môže slúžiť ako návod pre výpočet spätnej Laplaceovej transformácie, kedy vypočítame integrál na pravej strane a následne skúškou sa presvedčíme o správnosti riešenia. Dá sa ukázať, že tento vzťah platí absolútne, ak funkcia $F(p)$ vyhovuje istým podmienkam rastu, čo je obsahom nasledujúcej vety, ktorej dôkaz z dôvodov neúmerneho rozsahu vynecháme.

Veta 10.3.1 — Bromwichova veta. Nech $F(p) = F(s + j\omega) : \mathbb{C} \supset \mathbb{D}_F \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfná v polrovine $\operatorname{Re} p > s_0 \in \mathbb{R}$ a nech ďalej platí

1. integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(s + j\omega)| d\omega$$

konverguje pre každé $s > s_0$,

2. pre každé $p \in M_R$, kde $M_R = \{p \in \mathbb{C} \mid |p - s_0| = R > R_0 > 0, \operatorname{Re} p > s_0\}$ platí

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

Potom pre funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takú, že platí

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow t^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \right] = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{s-j\omega}^{s+j\omega} F(p) e^{pt} dp,$$

platí

$$f(t) \in D_{\mathcal{L}}$$

a takisto

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p).$$

Dôkaz. Celé znenie nájdeme napríklad v Moravčíkovej učebnici [6, s. 285]. ■

Definícia 10.3.1 — Spätná Laplaceova transformácia. Nech funkcia $F(p)$ vyhovuje predpokladom Bromwichovej vety 10.3.1.

Potom zobrazenie $\mathcal{L}_{-1} : F(p) \rightarrow f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ definované Riemannovým-Mellinovým vzorcom

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

sa nazýva *spätná Laplaceova transformácia*.

R Funkcia $F(p)$ má zväčša na množine $\operatorname{Re} p > s_0$ konečný počet izolovaných singulárnych bodov, a teda pri výpočte integrálu Riemannovho-Mellinovho vzorca budeme môcť použiť Cauchyho vetu o rezíduách a Jordanovu lemu.

Zodpovedáme ešte jednu významnú vlastnosť Laplaceovej transformácie, a to jednoznačnosť.

Veta 10.3.2 — Lerchova veta. Nech pre dve funkcie $f_1(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a $f_2(t) \in D_{\mathcal{L}}$ platí

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}.$$

Potom skoro všade na intervale $t \in [0, \infty)$ platí

$$f_1(t) \equiv f_2(t),$$

to znamená všade, okrem konečného počtu bodov nespojitosti týchto funkcií.

Dôkaz. Vyplýva z vlastností 1. Definície 10.1.2 o origináli Laplaceovej transformácie. ■

Ako sme sa už mohli presvedčiť pri riešených príkladoch, často vieme nájsť originál k danému Laplaceovmu obrazu bez nutnosti použitia Riemannovho-Mellinovho vzorca, kedy si vystačíme s vlastnosťami Laplaceovej transformácie, ktoré sme odvodili akiste i s týmto úmyslom. Na takéto určovanie originálu k danému obrazu (a nielen na to) je výhodné využiť slovník Laplaceovej transformácie, kde sú uvedené príslušné Laplaceove obrazy k najčastejšie sa vyskytujúcim vzorom.

Obzvlášť takýto postup využijeme pri hľadaní originálu pre racionálnu funkciu nezávislej premennej p . Podľa nám už známych vlastností sa to bude vždy týkať rýdzoracionálnych funkcií. Postupovať budeme tak, že si funkciu $F(p)$ rozložíme na súčet elementárnych (parciálnych) zlomkov a použitím vlastnosti linearity nájdeme príslušné originály.

Slovník niektorých originálov a obrazov Laplaceovej transformácie

Originál (vzor)	Obraz	Oblasť holomorfности
$f(t) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$	$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\tau p} dt$	
1. $H(t) = 1$	$\frac{1}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0$
2. $H(t - \tau), \tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$	$\frac{1}{p} e^{-\tau p}$	$\operatorname{Re} p > 0$
3. $t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
4. $e^{at}, a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{p-a}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$
5. $t^n e^{at}, a \in \mathbb{C}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$
6. $\frac{1}{a}(e^{at} - 1), a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{p(p-a)}$	$\operatorname{Re} p > \max\{0, \operatorname{Re} a\}$
7. $\sin \omega t, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
8. $\cos \omega t, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
9. $\sinh bt, b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{p^2 - b^2}$	$\operatorname{Re} p > b $
10. $\cosh bt, b \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2 - b^2}$	$\operatorname{Re} p > b $
11. $\sin^2 \omega t, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$	$\operatorname{Re} p > 0$
12. $\cos^2 \omega t, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p^2 + 2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$	$\operatorname{Re} p > 0$
13. $\sinh^2 bt, b \in \mathbb{R}$	$\frac{p^2 - 2b^2}{p(p^2 - 4b^2)}$	$\operatorname{Re} p > 2b $
14. $\cosh^2 bt, b \in \mathbb{R}$	$\frac{2b^2}{p(p^2 - 4b^2)}$	$\operatorname{Re} p > 2b $
15. $t \sin \omega t, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$

Slovník niektorých originálov a obrazov Laplaceovej transformácie

Originál (vzor)	Obraz	Oblasť holomorfnosti
$f(t) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$	$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\tau p} dt$	
16. $t \cos \omega t, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
17. $e^{at} \sin \omega t, a \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re} p > a$
18. $e^{at} \cos \omega t, a \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re} p > a$
19. $e^{at} \sinh bt, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{(p-a)^2 - b^2}$	$\operatorname{Re} p > \max\{a-b, a+b\}$
20. $e^{at} \cosh bt, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 - b^2}$	$\operatorname{Re} p > \max\{a-b, a+b\}$
21. $t^n \sin \omega t, n \in \mathbb{N}^*, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{n!(p+j\omega)^{n+1} - (p-j\omega)^{n+1}}{2j(p^2 + \omega^2)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
22. $t^n \cos \omega t, n \in \mathbb{N}^*, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{n!(p+j\omega)^{n+1} + (p-j\omega)^{n+1}}{2(p^2 + \omega^2)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
23. $\frac{(B+Aa)e^{at} - (B+Ab)e^{bt}}{a-b},$ $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b, A, B \in \mathbb{R}$	$\frac{Ap+B}{(p-a)(p-b)}$	$\operatorname{Re} p > \max\{a, b\}$
24. $1 - \cos \omega t, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}$	$\operatorname{Re} p > 0$
25. $(1+at)e^{at}, a \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$	$\operatorname{Re} p > a$
26. $t + \frac{1}{a}(1 - e^{at}), a \in \mathbb{R}$	$\frac{-a}{p^2(p-a)}$	$\operatorname{Re} p > \max\{0, a\}$
27. $t^a, a \in \mathbb{R}, a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
28. $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{pre } t = 0, \\ 0, & \text{pre } t \neq 0, \end{cases}$	1	$\mathbb{C}$
29. $\omega t - \cos \omega t, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega^3}{p^2(p^2 + \omega^2)}$	$\operatorname{Re} p > 0$
30. $\sin \omega t - \omega t \cos \omega t, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{2\omega^3}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
31. $\sin \omega t + \omega t \cos \omega t, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{2\omega p^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
32. $\cos \omega t - \cos \nu t, \omega, \nu \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + \nu^2)}$	$\operatorname{Re} p > 0$
33. $e^{\lambda t} \sin(\omega t + \varphi), \lambda, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega \cos \varphi - (p-\lambda) \sin \varphi}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lambda$
34. $e^{\lambda t} \cos(\omega t + \varphi), \lambda, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$	$\frac{(p-\lambda) \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lambda$
35. $1 - \frac{be^{at} - ae^{bt}}{b-a}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$	$\frac{ab}{p(p-a)(p-b)}$	$\operatorname{Re} p > \max\{0, a, b\}$
36. $J_0(at), a \in \mathbb{R}$, Besselova funkcia 1. dr.	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
37. $\frac{e^{at} - e^{bt}}{t}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$	$\ln \frac{p-b}{p-a}$	$\operatorname{Re} p > \max\{a, b\}$
38. $\frac{1 - \cos \omega t}{t}, \omega \in \mathbb{R}$	$\ln \frac{p^2 + \omega^2}{p^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
39. $\frac{1}{t} \sin \omega t, \omega \in \mathbb{R}$	$\arctan \frac{\omega}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0$

■ **Príklad 10.23** Použitím tabuľky vzorov a obrazov Laplaceovej transformácie nájdime originál daného Laplaceovmu obrazu:

1. $F(p) = \frac{p^2 + 1}{p(p+1)(p+2)(p+3)},$
2. $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4p+13)}.$

1. Rozložíme funkciu na súčet elementárnych zlomkov

$$F(p) = \frac{p^2 + 1}{p(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2} + \frac{D}{p+3},$$

po prenasobení menovateľom

$$p^2 + 1 = A(p+1)(p+2)(p+3) + Bp(p+2)(p+3) + Cp(p+1)(p+3) + Dp(p+1)(p+2).$$

Následne za p dosádzame koreňové činitele menovateľa funkcie $F(p)$

$$p = 0: \quad 1 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6},$$

$$p = -1: \quad 2 = -2B \Rightarrow B = -1,$$

$$p = -2: \quad 5 = 2C \Rightarrow C = \frac{5}{2},$$

$$p = -3: \quad 10 = -6D \Rightarrow D = -\frac{5}{3}.$$

Funkcia $F(p)$ má teda po rozklade na elementárne zlomky tvar

$$F(p) = \frac{1}{6} \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{5}{2} \frac{1}{p+2} - \frac{5}{3} \frac{1}{p+3}.$$

Pomocou slovníka originálov a obrazov Laplaceovej transformácie nájdeme originál ku tejto funkcii, ktorý má tvar

$$\mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = f(t) = \frac{1}{6} - e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}.$$

2. Funkcia má v menovateli len komplexné korene, preto hľadáme rozklad na elementárne zlomky v tvare

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4p+13)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{Cp+D}{p^2+4p+13}.$$

Musí platiť

$$\begin{aligned} p^2 &= (Ap+B)(p^2+4p+13) + (Cp+D)(p^2+1) \\ &= Ap^3 + 4Ap^2 + 13Ap + Bp^2 + 4Bp + 13B + Cp^3 + Cp + p^2D + D \\ &= p^3(A+C) + p^2(4A+B+D) + p(13A+4B+C) + (13B+D), \end{aligned}$$

odkiaľ dostávame sústavu

$$p^3: \quad 0 = A+C,$$

$$p^2: \quad 1 = 4A+B+D,$$

$$p^1: \quad 0 = 13A+4B+C,$$

$$p^0: \quad 0 = 13B+D,$$

ktorej riešením sú koeficienty $A = \frac{1}{40}$, $B = \frac{-3}{40}$, $C = \frac{-1}{40}$ a $D = \frac{39}{40}$. Preto daná funkcia má tvar

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4p+13)} = \frac{\frac{1}{40}p - \frac{3}{40}}{p^2+1} + \frac{\frac{-1}{40}p + \frac{39}{40}}{\underbrace{p^2+4p+13}_{=(p+2)^2+9}} \\ &= \frac{1}{40} \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{40} \frac{1}{p^2+1} + \left(\frac{-1}{40}\right) \frac{p+2}{(p+2)^2+3^2} + \left(\frac{39}{40} + \frac{2}{40}\right) \frac{1}{3} \frac{3}{(p+2)^2+3^2} \\ &= \frac{1}{40} \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{40} \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{40} \frac{p+2}{(p+2)^2+3^2} + \frac{41}{120} \frac{3}{(p+2)^2+3^2}. \end{aligned}$$

Z čoho použitím slovníka vzorov a obrazov Laplaceovej transformácie ľahko určíme, že pre originál tejto funkcie platí

$$\mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = f(t) = \frac{1}{40} \cos t - \frac{3}{40} \sin t - \frac{1}{40} e^{-2t} \cos 3t + \frac{41}{120} e^{-2t} \sin 3t.$$

■

Práve uvedený spôsob hľadania originálu pre daný Laplaceov obraz je síce veľmi triviálny, avšak do značnej miery obmedzujúci, a to samozrejme stupňom polynómu menovateľa racionálnej funkcie, ako aj mierou násobnosti predovšetkým komplexných koreňov.

Preto je oveľa výhodnejšie použiť jednu z nasledujúcich metód.

Veta 10.3.3 — Prvá Heavisideova veta o rozklade. Nech funkcia $F(p) : \mathbb{C} \supset D_F \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfná v bode ∞ a nech v nejakom prstencovom okolí bodu ∞ má Laurentov rozvoj

$$F(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p^3} + \dots + \frac{a_n}{p^{n+1}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}.$$

Potom pre všetky $t \geq 0$ je rad

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

konvergentný a navyše pre jeho súčet platí

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p).$$

Dôkaz. Laurentov rozvoj funkcie $F(p)$ konverguje pre $\left|\frac{1}{p}\right| < R \in \mathbb{R}_{>0} \Leftrightarrow |p| > \frac{1}{R}$. Zvoľme ľubovoľné, ale pevné číslo $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, pre ktoré platí $\frac{1}{\rho} < R$ a nech pre $p \in \mathbb{C}$ je $\left|\frac{1}{p}\right| = \frac{1}{\rho}$. Odtiaľ vyplýva absolútna konvergencia radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\rho^{n+1}}$, a teda musí $\forall M \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, že $\forall n > n_0$ platí

$$\left| \frac{a_n}{\rho^{n+1}} \right| < M \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| < M \rho^{n+1}.$$

Na základe toho bude aj $\forall n > n_0$ pre rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ platiť

$$\left| \frac{a_n}{n!} t^n \right| < \frac{M \rho^{n+1}}{n!} |t|^n = M \rho \frac{(\rho |t|)^n}{n!}.$$

Odkiaľ dostávame rad konvergentný pre všetky $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \rho \frac{(\rho |t|)^n}{n!} = M \rho e^{\rho t},$$

a teda aj jeho minorantný rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ je pre $t \in \mathbb{R}$ konvergentný absolútne. Preto aj funkcia $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ ako súčet konvergentného radu má na $\mathbb{R}$ deriváciu ľubovoľného rádu a navyše pre $t \in \mathbb{R}_{>0}$ platí

$$|f(t)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{t^n}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty} M \rho \frac{(\rho t)^n}{n!} = M \rho e^{\rho t}.$$

Z toho nám vyplýva, že $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$.

Podľa definície Laplaceovej transformácie pre obraz funkcie $f(t)$ platí

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \mathcal{L}\{t^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \frac{n!}{p^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}} = F(p).\end{aligned}$$

Keďže mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ konverguje absolútne, mohli sme ho integrovať člen po člene. ■

■ **Príklad 10.24** Použitím prvej Heavisideovej vety o rozklade nájdime originál k Laplaceovmu obrazu:

1. $F(p) = \frac{1}{p} \sin \frac{1}{p}$, pre $\operatorname{Re} p > 0$,

2. $F(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$, pre $\operatorname{Re} p > 0$.

1. Pre $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

$$F(p) = \frac{1}{p} \sin \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! p^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! p^{2n+2}},$$

odkiaľ podľa Vety 10.3.3 pre všetky $t \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{((2n+1)!)^2}.$$

2. Pre danú funkciu platí nasledujúca rovnosť

$$F(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} = -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2+1} \right).$$

Ďalej vieme

$$\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{p^2}\right)} = \frac{1}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p^{2n+2}}.$$

Derivovaním tohto radu člena po člene dostávame

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+2}{p^{2n+3}},$$

a teda daný Laplaceov obraz má rozvoj tvaru

$$F(p) = -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{2n+2}{p^{2n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{p^{2n+3}},$$

odkiaľ podľa Vety 10.3.3 pre všetky $t \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} &= f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} = t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= t \cdot \sin t,\end{aligned}$$

čo je výsledok v zhode s Príkladom 10.10 pre $b = 1$. ■

Veta 10.3.4 — Výpočet Laplaceovho originálu pomocou rezíduí. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, ďalej nech je funkcia $F(p)$ holomorfná na $\mathbb{C}$ s výnimkou konečného počtu izolovaných singulárnych bodov $p_1, p_2, \dots, p_m$ patriacich do $M_r = \{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p \leq s_0\}$, kde s_0 je exponent (index) rastu funkcie $f(t)$.

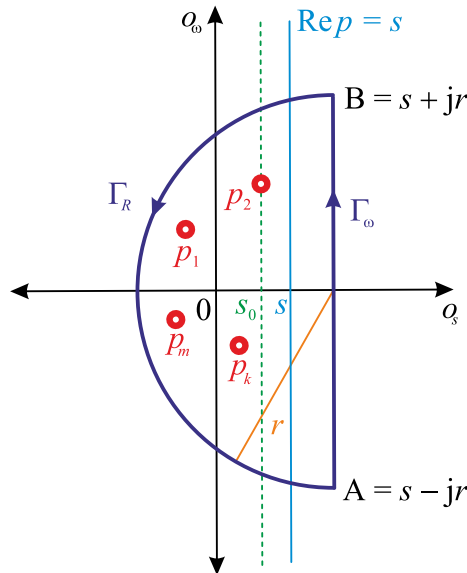
Nech platí

$$\lim_{M_R \ni p \rightarrow \infty} F(p) = 0,$$

kde $M_R = \{p \in \mathbb{C} \mid |p - s| = r > R > 0, \operatorname{Re} p \leq s\}$ pre každé $s > s_0$.

Potom platí

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}).$$



Obr. 10.3.1: K dôkazu Vety pre výpočet Laplaceovho originálu pomocou rezíduí 10.3.4

Dôkaz. Uvažujeme krivku $\Gamma = \Gamma_R \cup \Gamma_\omega$, ktorá sa skladá z polkružnice

$$\Gamma_R = \left\{ p \in \mathbb{C} \mid |p - s_0| = r > R > 0, \arg p \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right\}$$

a úsečky

$$\Gamma_\omega = \{p \in \mathbb{C} \mid p = s + jt, t \in [-r, r], r > R > 0\},$$

s tým, že $r > R$ sme zvolili tak, aby všetky izolované singulárne body funkcie $F(p)$ ležali vo vnútri krivky Γ .

Potom podľa Cauchyho vety o rezíduách platí

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}).$$

Krivkový integrál na ľavej strane je súčtom integrálov po polkružnici Γ_R a po úsečke Γ_ω

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_R} F(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi j} \int_{s-jr}^{s+jr} F(p) e^{pt} dp.$$

Pre $r \rightarrow \infty$ je podľa Jordanovej lemy 8.4.2 prvý integrál po polkružnici rovný nule

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_R} F(p) e^{pt} dp = 0$$

a druhý integrál prevedieme na integrál po priamke $\Gamma_{\text{Re } p=s}$, a teda celkovo platí

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^m \text{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}).$$

■

R Nech je singulárny bod p_k pólom prvého rádu funkcie $F(p)$ patriaci do M_r . Potom zrejme platí

$$\text{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}) = (\text{res}_{p=p_k} F(p)) \cdot e^{p_k t}.$$

■ **Príklad 10.25** Použitím predchádzajúcej Vety 10.3.4 pre výpočet Laplaceovho originálu pomocou rezíduí nájdime originál Laplaceovho obrazu:

1. $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)(p-3)}$, pre $\text{Re } p > 0$,
2. $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$, pre $\text{Re } p > 0$,
3. $F(p) = \frac{p^2-p+2}{(p^2+4)(p^2+1)}$, pre $\text{Re } p > 0$.

1. Funkcia $F(p)$ má tri singularities $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$. Funkcia je rýdzoracionálna, a preto platí $\lim_{M_R \ni p \rightarrow \infty} F(p) = 0$, a teda platia predpoklady Vety 10.3.4. Okrem prvej singularity, ktorá je pólom druhého rádu, sú zvyšné jednoduché póly. Vypočítame si zvlášť rezíduum práve v prvom singulárnom bode, keďže zvyšné rezíduá budú jednoduché funkčné hodnoty vzhľadom na poslednú poznámku. Teda

$$\begin{aligned} \text{res}_{p=1} (F(p) e^{pt}) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{(p-1)^2(p-2)(p-3)} e^{pt} (p-1)^2 \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left(\frac{e^{pt}}{(p-2)(p-3)} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{te^{pt}}{p^2-5p+6} - \frac{(2p-5)e^{pt}}{(p^2-5p+6)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2}te^t + \frac{3}{4}e^t, \end{aligned}$$

preto pre Laplaceov obraz funkcie máme

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{res}_{p=1} (F(p) e^{pt}) + e^{p_2 t} \cdot \text{res}_{p=p_2} F(p) + e^{p_3 t} \cdot \text{res}_{p=p_3} F(p) \\ &= \left(\frac{1}{2}te^t + \frac{3}{4}e^t \right) + e^{2t} \lim_{p \rightarrow 2} \frac{1}{(p-1)(p-3)} + e^{3t} \lim_{p \rightarrow 3} \frac{1}{(p-1)(p-2)} \\ &= \frac{1}{2}te^t + \frac{3}{4}e^t - e^{2t} + \frac{e^{3t}}{2}. \end{aligned}$$

2. Zadaná funkcia má dve singularity $p_1 = j$ a $p_2 = -j$, ktoré sú obe pólmi druhého rádu. Opäť je to rýdzoracionálna funkcia spĺňajúca podmienku $\lim_{M_R \ni p \rightarrow \infty} F(p) = 0$. Vypočítame hodnoty oboch rezíduí

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=j} (F(p) e^{pt}) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow j} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{(p^2+1)^2} (p-j)^2 e^{pt} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow j} \frac{d}{dp} \left(\frac{e^{pt}}{(p+j)^2} \right) = \lim_{p \rightarrow j} \frac{te^{pt}(p+j)^2 - e^{pt}2(p+j)}{(p+j)^4} \\ &= -\frac{1}{4}te^{jt} - \frac{1}{4}je^{jt}, \\ \operatorname{res}_{p=-j} (F(p) e^{pt}) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow -j} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{(p^2+1)^2} (p+j)^2 e^{pt} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow -j} \frac{d}{dp} \left(\frac{e^{pt}}{(p-j)^2} \right) = \lim_{p \rightarrow -j} \frac{te^{pt}(p-j)^2 - e^{pt}2(p-j)}{(p-j)^4} \\ &= -\frac{1}{4}te^{-jt} + \frac{1}{4}je^{-jt}. \end{aligned}$$

Odkiaľ pre Laplaceov originál obrazu $F(p)$ dostávame s použitím Eulerových vzorcov

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}) = -\frac{1}{4}te^{jt} - \frac{1}{4}je^{jt} - \frac{1}{4}te^{-jt} + \frac{1}{4}je^{-jt} \\ &= -\frac{1}{2}t \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \right) - \frac{1}{2}(j)^2 \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right) \\ &= -\frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{2} \sin t, \end{aligned}$$

čo je v zhode s Príkladom 10.22 - 4. pre $b = 1$.

3. Menovateľ danej funkcie má štyri jednoduché korene $p_1 = 2j$, $p_2 = -2j$, $p_3 = j$ a $p_4 = -j$. Zrejme tieto korene menovateľa sú pólmi 1. rádu rýdzoracionálnej funkcie $F(p)$ spĺňajúcej predpoklady Vety 10.3.4, že $\lim_{M_R \ni p \rightarrow \infty} F(p) = 0$. Preto pristúpime k riešeniu podľa tvrdenia tejto vety a po nej nasledujúcej poznámky.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^4 (\operatorname{res}_{p=p_k} F(p)) \cdot e^{p_k t} = \lim_{p \rightarrow 2j} \frac{(p^2 - p + 2) e^{pt}}{(p+2j)(p^2+1)} + \lim_{p \rightarrow -2j} \frac{(p^2 - p + 2) e^{pt}}{(p-2j)(p^2+1)} \\ &\quad + \lim_{p \rightarrow j} \frac{(p^2 - p + 2) e^{pt}}{(p^2+4)(p+j)} + \lim_{p \rightarrow -j} \frac{(p^2 - p + 2) e^{pt}}{(p^2+4)(p-j)} \\ &= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}j \right) e^{2jt} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}j \right) e^{-2jt} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}j \right) e^{jt} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}j \right) e^{-jt}. \end{aligned}$$

Získali sme Laplaceov obraz $\mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = f(t)$ v komplexnom tvare. Vidíme, že sčítance sú pre $t \in \mathbb{R}_{>0}$ po dvoch komplexne združené, a preto ich súčet je reálne číslo. Preto hľadaným originálom je

$$f(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{1-j}{6} e^{2jt} - \frac{1+j}{6} e^{jt} \right) = \frac{1}{3} (\cos 2t + \sin 2t - \cos t + \sin t).$$

Podobne sme mohli postupovať aj v prechádzajúcom príklade. ■

Vetu 10.3.4 pre výpočet inverznej Laplaceovej transformácie pomocou rezíduí funkcie $F(p)$ môžeme mierne modifikovať pre prípad, že je funkcia $F(p)$ racionálnou funkciou.

Dôsledok 10.3.5 — Druhá Heavisideova veta o rozklade. Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$.

Nech $F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$ je rýdzoracionálna funkcia, kde $m = \deg P_m(p) < n = \deg Q_n(p)$, pričom mnohočleny $P_m(p)$ a $Q_n(p)$ nemajú spoločný koreň.

Ďalej nech koreňmi menovateľa $Q_n(p)$ sú $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, kde $q \in \mathbb{N}^*$, s násobnosťami $r_1, r_2, \dots, r_q$ (zrejme $r_1 + r_2 + \dots + r_q = n$).

Potom platí

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = \sum_{k=1}^q \frac{1}{(r_k-1)!} \lim_{p \rightarrow \alpha_k} \frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}} \left(\frac{P_m(p)}{Q_n(p)} e^{pt} (p - \alpha_k)^{r_k} \right)$$

a špeciálne, ak násobnosť koreňov je jednoduchá, t. j. $r_k = 1$ pre všetky $k = 1, 2, \dots, q = n$, potom platí

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = \sum_{k=1}^q \frac{P_m(\alpha_k)}{Q'_n(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}.$$

Dôkaz. Vyplýva priamo z Vety 8.2.1 pre výpočet rezídua v póle k -tého rádu a jej Dôsledku 8.2.3 pre pól 1. rádu. ■

■ **Príklad 10.26** Použitím Dôsledku 10.3.5 druhej Heavisideovej vety o rozklade nájdime originál Laplaceovho obrazu:

1. $F(p) = \frac{p^2+p+1}{p^3-3p^2-18p+40}$, pre $\operatorname{Re} p > 0$,
2. $F(p) = \frac{1}{(p-1)^3(p-2)(p^2+1)}$, pre $\operatorname{Re} p > 0$,
3. $F(p) = \frac{2p-3}{(p^2-2p+5)^2}$, pre $\operatorname{Re} p > 0$.

1. Zadaná funkcia je typu $F(p) = \frac{P_2(p)}{Q_3(p)}$, t. j. $2 = m < n = 3$, kde polynóm čitateľa je $P_0(p) = p^2 + p + 1$ a polynóm menovateľa je $Q_3(p) = p^3 - 3p^2 - 18p + 40$. Polynóm $Q_3(p)$ má všetky tri korene jednoduché, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = -4$. A teda podľa druhej Heavisideovej vety o rozklade pre Laplaceov originál platí

$$\mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = f(t) = \frac{P_2(2)}{Q'_3(2)} e^{2t} + \frac{P_2(5)}{Q'_3(5)} e^{5t} + \frac{P_2(-4)}{Q'_3(-4)} e^{-4t},$$

kde $Q'_3(p) = 3p^2 - 6p - 18$. Preto pre $t \in \mathbb{R}_{>0}$ platí

$$\mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = f(t) = -\frac{5}{18} e^{2t} + \frac{29}{27} e^{5t} + \frac{11}{54} e^{-4t}.$$

2. Funkcia je typu $F(p) = \frac{P_0(p)}{Q_6(p)}$, kde polynóm čitateľa je $P_0(p) = 1$ a polynóm menovateľa je $Q_6(p) = (p-1)^3(p-2)(p^2+1)$, ktorý má tri jednoduché korene $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = j$, $\alpha_3 = -j$ (t. j. $r_1 = r_2 = r_3 = 1$) a jeden trojnásobný koreň $\alpha_4 = 1$ (t. j. $r_2 = 3$). Preto podľa druhej

Heavisideovej vety o rozklade pre $t \in \mathbb{R}_{>0}$ platí

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(r_k-1)!} \lim_{p \rightarrow \alpha_k} \frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}} \left(\frac{P_m(p)}{Q_n(p)} e^{pt} (p - \alpha_k)^{r_k} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 2} \left(\frac{e^{pt} (p-2)}{(p-1)^3 (p-2) (p^2+1)} \right) \\ &\quad + \lim_{p \rightarrow j} \left(\frac{e^{pt} (p-j)}{(p-1)^3 (p-2) (p^2+1)} \right) \\ &\quad + \lim_{p \rightarrow -j} \left(\frac{e^{pt} (p+j)}{(p-1)^3 (p-2) (p^2+1)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(3-1)!} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{e^{pt} (p-1)^3}{(p-1)^3 (p-2) (p^2+1)} \right), \end{aligned}$$

po úprave limit a vyčíslení derivácie štvrtého sčítanca dostávame

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{5} e^{2t} + \left(\frac{1}{40} + \frac{3}{40}j \right) e^{jt} + \left(\frac{1}{40} - \frac{3}{40}j \right) e^{-jt} \\ &\quad + \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{2(6p^4 - 16p^3 + 15p^2 - 3)}{(p-2)^3 (p^2+1)^3} e^{pt} - 2 \frac{3p^2 - 4p + 1}{(p-2)^3 (p^2+1)} t e^{pt} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t^2 e^{pt}}{(p-2)(p^2+1)} \right) \\ &= \frac{1}{5} e^{2t} + 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\left(\frac{1}{40} + \frac{3}{40}j \right) e^{jt} - \frac{1}{4} t^2 e^t - \frac{1}{4} e^t \right) \\ &= \frac{1}{5} e^{2t} + \frac{1}{20} (\cos t + 3 \sin t) - \frac{1}{4} t^2 e^t - \frac{1}{4} e^t. \end{aligned}$$

Opäť sme sčítali komplexne združené sčítance, aby sme získali iba reálnu zložku, keďže $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

3. Pre zadanú funkciu zrejme platí

$$F(p) = \frac{2p-3}{(p^2-2p+5)^2} = \frac{2(p-1)-1}{((p-1)^2+2)^2} = G(p-1),$$

kde

$$G(p) = \frac{2p-1}{(p^2+4)^2}.$$

Nájdeme originál $\mathcal{L}_{-1} \{G(p)\} = g(t)$ a následne s použitím Vety 10.2.12 o „tlmení“ originálu aj originál pôvodnej funkcie.

Funkcia $G(p)$ je typu $\frac{P_1(p)}{Q_4(p)}$, kde $P_1(p) = p-1$ a $Q_4(p) = (p^2+4)^2 = (p-2j)^2 (p+2j)^2$.

Vidíme teda, že funkcia $G(p)$ má dva dvojnásobné póly v bodoch $p_1 = \alpha_1 = 2j$ a $p_2 = \alpha_2 = -2j$, ktoré sú zároveň koreňmi menovateľa tejto funkcie. Podľa druhej vety o rozklade pre funkciu $g(t)$ platí

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow 2j} \frac{d}{dp} \left(\frac{2p-1}{(p-2j)^2 (p+2j)^2} (p-2j)^2 e^{pt} \right) \\ &\quad + \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow -2j} \frac{d}{dp} \left(\frac{2p-1}{(p-2j)^2 (p+2j)^2} (p+2j)^2 e^{pt} \right), \end{aligned}$$

odkiaľ derivovaním a následnou úpravou ďalej dostávame

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \lim_{p \rightarrow 2j} \left(\frac{-2p+2+4j}{(p+2j)^3} + \frac{(2p-1)t}{(p+2j)^2} \right) e^{pt} \\
 &\quad + \lim_{p \rightarrow -2j} \left(\frac{-2p+2-4j}{(p-2j)^3} + \frac{(2p-1)t}{(p-2j)^2} \right) e^{pt} \\
 &= \left(\frac{j}{32} + \frac{1-4j}{16} \right) e^{2jt} + \left(\frac{-j}{32} + \frac{1+4j}{16} \right) e^{-2jt} \\
 &= -\frac{1}{16} \frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{2j} + \frac{1}{8} t \frac{e^{2jt} + e^{-2jt}}{2} + \frac{1}{2} t \frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{2j} \\
 &= -\frac{1}{16} \sin 2t + \frac{1}{8} t \cos 2t + \frac{1}{2} t \sin 2t = \frac{1}{8} t \cos 2t + \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{16} \right) \sin 2t.
 \end{aligned}$$

Odkiaľ, keďže $F(p) = G(p-1)$, použitím Vety 10.2.12 o „tlmení“ originálu dostávame

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = e^{1t} g(t) = \frac{1}{2} e^t \left(\frac{1}{4} t \cos 2t + \left(t - \frac{1}{8} \right) \sin 2t \right).$$

■

Veta 10.3.6 Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$, nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a nech funkcia $F(p) : \mathbb{C} \supset D_F \rightarrow \mathbb{C}$ má v polrovine $\operatorname{Re} p \leq s_0$, kde s_0 je exponent (index) rastu funkcie $f(t)$, nekonečne mnoho pólov $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$

Nech existuje systém kružníc $K_n = \{p \in \mathbb{C} \mid |p| = R_n\}$ taký, že postupnosť jej polomerov $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, a teda $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$.

Nech platí

$$\lim_{\substack{|p| \rightarrow \infty \\ p \in M_{R_0}}} F(p) = 0,$$

kde

$$M_{R_0} = \{p \in \mathbb{C} \mid |p| = R > R_0 > 0, \operatorname{Re} p \leq s_0\}.$$

Nech ďalej integrál $\int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p) e^{pt} dp$ absolútne konverguje pre $s \in \mathbb{R}, s > s_0$.

Potom platí

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}).$$

Dôkaz. Systém kružníc $K_n = \{p \in \mathbb{C} \mid |p| = R_n\}, R_n < R_{n+1}$, pre každé $n \in \mathbb{N}$, kde $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ zostrojíme tak, aby na žiadnej z nich neležal ani jeden z pólov $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ funkcie $F(p)$. Takto vzniknutá postupnosť kružníc má určite neklesajúci počet pólov nachádzajúcich sa v jednotlivých kružniciach. Pri označení k_n je počet pólov v kružnici K_n postupnosť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesajúca a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$, čo je dosť dôležitý fakt pre nasledujúcu úvahu.

Označme krivku Γ_n oblúk kružnice K_n ležiaci v polrovine $\operatorname{Re} p \leq s_0$, koncové body tohto oblúka $s - j\omega_n$, $s + j\omega_n$ sú zároveň koncovými bodmi úsečky $\overline{AB}$. Podľa Cauchyho vety o rezíduách je integrál po takto

vzniknutej uzavretej krivke po úprave rovný

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\omega_n}^{s+j\omega_n} F(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_n} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{k_n} \operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}).$$

Nech $t \in \mathbb{R}_{>0}$ a $n \rightarrow \infty$, potom podľa definície Laplaceovej spätnej transformácie (pre $n \rightarrow \infty$ je aj $\omega_n \rightarrow \infty$) konverguje prvý integrál ku $f(t)$ a druhý integrál je podľa Jordanovej lemy 8.4.2 rovný nule. Preto dostávame

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}).$$

■

R Opäť platí v prípade, že funkcia je typu $F(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, kde $\varphi(p), \psi(p) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sú holomorfné na $\mathbb{C}$ a v oblasti $\operatorname{Re} p \leq s_0$ má funkcia $F(p)$ iba jednoduché póly $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$, potom predchádzajúci vzťah môžeme zredukovať na

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(p_k)}{\psi'(p_k)} e^{p_k t}.$$

■ **Príklad 10.27** Nájdime originál Laplaceovho obrazu funkcie

$$F(p) = \frac{1}{p \cosh p},$$

pre $\operatorname{Re} p > 0$.

Korene menovateľa $\psi(p) = p \cosh p$ sú $p = 0$ a $\cosh p = \cos j p = 0$. Preto póly zadanej funkcie $F(p)$ sú $p_0 = 0$, $p_k = j(k - \frac{1}{2})\pi$ a komplexne združené póly $\bar{p}_k = -j(k - \frac{1}{2})\pi$, kde $k \in \mathbb{N}$. Všetko sú to jednoduché póly a je ich nekonečne mnoho. Preto podľa predchádzajúcej Vety 10.3.6, v našom prípade hlavne po nej nasledujúcej poznámky, vzhľadom na skutočnosť, že nenulové korene sú komplexne združené čísla pre Laplaceov originál zadanej funkcie platí

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = \frac{e^{pt}}{(p \cosh p)'} \Big|_{p=p_0} + 2 \cdot \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{pt}}{(p \cosh p)'} \Big|_{p=p_k} \right) \\ &= \frac{e^{pt}}{\cosh p + p \sinh p} \Big|_{p=0} + 2 \cdot \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{pt}}{\cosh p + p \sinh p} \Big|_{p=p_k} \right) \\ &= \frac{e^{0t}}{\underbrace{\cosh 0}_{\cosh 0 = \cos 0 = 1} + 0 \cdot \sinh 0} + 2 \cdot \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{p_k t}}{\underbrace{\cosh p_k + p_k \sinh p_k}_{=0}} \Big|_{p_k = j(k - \frac{1}{2})\pi} \right) \\ &= 1 + 2 \cdot \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{j(k - \frac{1}{2})\pi t}}{j(k - \frac{1}{2})\pi \cdot \underbrace{\sinh \left(j \left(k - \frac{1}{2} \right) \pi \right)}_{=j \sin(k - \frac{1}{2})\pi = j(-1)^{k+1}}} \\ &= 1 + 2 \cdot \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{j(k - \frac{1}{2})\pi t}}{(k - \frac{1}{2})\pi} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(k - \frac{1}{2})\pi t}{(k - \frac{1}{2})\pi}. \end{aligned}$$

Nájdený tvar je Fourierov rozvoj periodickej funkcie $f(t) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ s periódou $T = 4$, pre ktorú platí

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pre } t \in (4k-1, 4k+1), \\ 1, & \text{pre } t = 4k \pm 1, \\ 2, & \text{pre } t \in (4k+1, 4k+3), \text{ kde } k \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

ktorú môžeme vyjadriť s použitím Heavisideovej funkcie $H(t)$ v tvare

$$f(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k H(t - 2k - 1),$$

kde $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

Druhý spôsob riešenia je využiť možnosti prepisu funkcie $F(p)$ do nekonečného rozvoja a použitím prvej Heavisideovej vety o rozklade 10.3.3 nájsť jej originál. Teda pre všetky $p \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p \cosh p} = \frac{1}{\frac{p}{2}(e^p + e^{-p})} = \frac{2e^{-p}}{p(1 + e^{-2p})} = \frac{2e^{-p}}{p(1 - (-e^{-2p}))} \\ &= \frac{2e^{-p}}{p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (e^{-2p})^k = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)p}}{p}. \end{aligned}$$

Tento rad je konvergentný na $|e^{-2p}| < 1 \Leftrightarrow |e^{2p}| > 1$, a preto podľa spomenutej Vety 10.3.3 platí

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k H(t - 2k - 1).$$

■

10.4 Aplikácie Laplaceovej transformácie

V ďalšom sa budeme zaoberať najčastejšími aplikáciami Laplaceovej transformácie. Z nášho pohľadu nás budú zaujímať najmä dve aplikačné oblasti, a to riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc a riešenie nevlastných integrálov.

10.4.1 Lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientmi

Metodika riešenia je v podstate totožná so spôsobom hľadania riešenia pri Fourierovej transformácii v predchádzajúcej kapitole. Transformujeme si diferenciálnu rovnicu na rovnicu Laplaceových obrazov, vyjadríme si obraz funkcie hľadaného riešenia (tzv. *prechodová funkcia*) a pomocou spätnej Laplaceovej transformácie nájdeme jej originál, ktorý je riešením pôvodnej lineárnej diferenciálnej rovnice.

A teda, nech je daná lineárna diferenciálna rovnica

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t), \quad (10.1)$$

kde $a_k \in \mathbb{R}$ s $k = 1, 2, \dots, n$, sú koeficienty, $f(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ je funkcia pravej strany (predpokladajme, že je spojitá). Riešenie $y(t)$ vyhovuje počiatočným podmienkam

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0, \\ y'(0) &= y'_0, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(0) &= y_0^{(n-1)}, \end{aligned}$$

kde $y_0^{(k)} \in \mathbb{R}$, kde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, sú dané čísla definované v $[0, \infty)$.

Ak predpokladáme, že riešenie $y(t) \in D_{\mathcal{L}}$, potom podľa Vety 10.2.2 o derivovaní originálu a na základe predpokladu, že obraz riešenia je $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$, určíme Laplaceov obraz derivácie $y^{(k)}(t)$, pre $k = 1, 2, \dots, n$,

$$\mathcal{L}\{y^{(k)}(t)\} = p^k Y(p) - p^{k-1} y_0 - p^{k-2} y'_0 - \dots - p y_0^{(k-2)} - y_0^{(k-1)}.$$

Ďalej predpokladajme $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a potom použitím Vety 10.2.1 o linearite dostávame pôvodnú diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\begin{aligned} p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y'_0 - \dots - p y_0^{(n-2)} - y_0^{(n-1)} \\ + a_1 \cdot (p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} y_0 - p^{n-3} y'_0 - \dots - p y_0^{(n-3)} - y_0^{(n-2)}) \\ + \dots + a_{n-1} \cdot (p Y(p) - y_0) + a_n \cdot Y(p) = F(p). \end{aligned}$$

Odtiaľ

$$\begin{aligned} (p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \cdot Y(p) = F(p) + p^{n-1} y_0 + p^{n-2} y'_0 + \dots + p y_0^{(n-2)} + y_0^{(n-1)} \\ + a_1 \cdot (p^{n-2} y_0 + p^{n-3} y'_0 + \dots + p y_0^{(n-3)} + y_0^{(n-2)}) + \dots + a_{n-1} \cdot y_0 \end{aligned}$$

a pre riešenie $Y(p)$ tejto lineárnej algebrickej rovnice platí

$$Y(p) = \frac{F(p) + y_0 p^{n-1} + (y'_0 + a_1 y_0) p^{n-2} + \dots + (y_0^{(n-1)} + a_1 y_0^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y_0)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}.$$

Celkové riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice $y(t) = \mathcal{L}_{-1}\{Y(p)\}$ získame pomocou niektorej z metód pre určenie originálu k danému Laplaceovmu obrazu. Z Lerchovej vety vieme, že daným podmienkam vyhovuje jediné spojité riešenie. Ak by bola funkcia pravej strany $f(t)$ na $[0, \infty)$ iba po častiach spojitá, bude po častiach spojitá na $[0, \infty)$ aj n -tá derivácia riešenia $y^{(n)}(t)$.

■ **Príklad 10.28** Riešme diferenciálnu rovnicu vyhovujúcu daným počiatočným podmienkam

$$\begin{aligned} y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) &= 0, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 2. \end{aligned}$$

Ak $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$, potom podľa Vety 10.2.2 o derivovaní originálu platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} &= pY(p) - y(0) = pY(p) - 2, \\ \mathcal{L}\{y''(t)\} &= p^2 Y(p) - y(0) \cdot p - y'(0) = p^2 Y(p) - 2p - 2. \end{aligned}$$

Po dosadení do pôvodnej rovnice dostávame

$$\begin{aligned} p^2 Y(p) - 2p - 2 - 5(pY(p) - 2) + 6Y(p) &= 0, \\ (p^2 - 5p + 6) \cdot Y(p) - 2p - 2 + 10 &= 0, \end{aligned}$$

odkiaľ vyjadríme prenosovú funkciu

$$Y(p) = \frac{2p - 8}{p^2 - 5p + 6}.$$

Jej rozkladom na parciálne zlomky dostávame

$$Y(p) = \frac{2p-8}{p^2-5p+6} = \frac{4}{p-2} + \frac{-2}{p-3}.$$

Pomocou tabuľky obrazov a vzorov $\mathcal{L}$ transformácie nájdeme Laplaceov originál funkcie $Y(p)$

$$y(t) = \mathcal{L}_{-1}\{Y(p)\} = 4e^{2t} - 2e^{3t}.$$

■

■ **Príklad 10.29** Nájdime riešenie danej diferenciálnej rovnice vyhovujúce počiatočným podmienkam

$$\begin{aligned} y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) &= 10e^t, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 2. \end{aligned}$$

Opäť $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$, a teda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} &= pY(p) - y(0) = pY(p) - 1, \\ \mathcal{L}\{y''(t)\} &= p^2Y(p) - y(0) \cdot p - y'(0) = p^2Y(p) - p - 2, \\ \mathcal{L}\{10e^t\} &= \frac{10}{p-1}. \end{aligned}$$

Po dosadení

$$\begin{aligned} p^2Y(p) - p - 2 + 4(pY(p) - 1) + 5Y(p) &= \frac{10}{p-1}, \\ (p^2 + 4p + 5) \cdot Y(p) - p - 6 &= \frac{10}{p-1}, \\ Y(p) &= \frac{p+6}{p^2+4p+5} + \frac{10}{(p-1)(p^2+4p+5)}, \end{aligned}$$

rozkladom na parciálne zlomky prenosovej funkcie dostávame

$$Y(p) = \frac{1}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{p-1}.$$

Odkiaľ Laplaceov originál hľadaného riešenia diferenciálnej rovnice je

$$y(t) = \mathcal{L}_{-1}\{Y(p)\} = e^{-2t} \sin t + e^t.$$

■

■ **Príklad 10.30** Hľadáme riešenie danej diferenciálnej rovnice vyhovujúce počiatočným podmienkam

$$\begin{aligned} y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) &= \sin t, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 2. \end{aligned}$$

Označme $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$, potom podľa Vety 10.2.2 o derivovaní originálu platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} &= pY(p) - y(0) = pY(p) - 1, \\ \mathcal{L}\{y''(t)\} &= p^2Y(p) - y(0) \cdot p - y'(0) = p^2Y(p) - p - 2, \\ \mathcal{L}\{\sin t\} &= \frac{1}{p^2+1}. \end{aligned}$$

Rovnica bude mať po Laplaceovej transformácii tvar

$$\begin{aligned} p^2 Y(p) - p - 2 + 2(pY(p) - 1) + 5Y(p) &= \frac{1}{p^2 + 1}, \\ (p^2 + 2p + 5)Y(p) &= \frac{1}{p^2 + 1} + p + 4 = \frac{p^3 + 4p^2 + p + 5}{p^2 + 1}, \\ Y(p) &= \frac{p^3 + 4p^2 + p + 5}{(p^2 + 1)(p^2 + 2p + 5)}, \end{aligned}$$

keďže činitele menovateľa pravej strany nemajú reálne korene, rozložíme tento na elementárne zlomky

$$Y(p) = \frac{Ap + B}{p^2 + 1} + \frac{Cp + D}{p^2 + 2p + 5}.$$

Po určení koeficientov má funkcia tvar

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{-\frac{1}{10}p + \frac{1}{5}}{p^2 + 1} + \frac{\frac{11}{10}p + 4}{p^2 + 2p + 5} \\ &= -\frac{1}{10} \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{11}{10} \frac{p}{p^2 + 2p + 5} + 4 \frac{1}{p^2 + 2p + 5} \\ &= -\frac{1}{10} \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{11}{10} \frac{p + 1}{p^2 + 2p + 5} - \frac{11}{10} \frac{1}{p^2 + 2p + 5} + 4 \frac{1}{p^2 + 2p + 5} \\ &= -\frac{1}{10} \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{11}{10} \underbrace{\frac{p + 1}{p^2 + 2p + 5}}_{(p^2 + 2p + 1) + 4} + \frac{29}{20} \frac{1}{p^2 + 2p + 5} \\ &= -\frac{1}{10} \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{11}{10} \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 2^2} + \frac{29}{20} \frac{1}{(p + 1)^2 + 2^2}. \end{aligned}$$

Z tohto tvaru určíme Laplaceov originál funkcie, ktorá je riešením diferenciálnej rovnice

$$y(t) = \mathcal{L}_{-1}\{Y(p)\} = -\frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t + \frac{11}{10} e^{-t} \cos 2t + \frac{29}{20} e^{-t} \sin 2t.$$

■

■ **Príklad 10.31** Nájdime riešenie danej diferenciálnej rovnice vyhovujúce počiatocným podmienkam

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= \sin 2t, \\ y(\pi) &= 1, \\ y'(\pi) &= 1. \end{aligned}$$

Najskôr si posunieme bod $t = \pi$ do počiatku súradnicového systému, zavedením nezávislej premennej $\tau = t - \pi$, z čoho $t = \tau + \pi$. Potom má zadaná diferenciálna rovnica aj s podmienkami tvar

$$y''(\tau) + y(\tau) = \sin 2(\tau + \pi),$$

teda

$$\begin{aligned} y''(\tau) + y(\tau) &= \sin 2\tau, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Predpokladáme, že $\mathcal{L}\{y(\tau)\} = Y(p)$, a podobne platí $\mathcal{L}\{\sin 2\tau\} = \frac{2}{p^2+4}$, preto sa zobrazí transformovaná diferenciálna rovnica do rovnice

$$p^2 Y(p) - p - 1 + Y(p) = \frac{2}{p^2 + 4},$$

odkiaľ si vyjadríme prechodovú funkciu

$$Y(p) = \frac{2}{(p^2+4)(p^2+1)} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}.$$

Jej rozkladom na elementárne zlomky dostávame

$$Y(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{5}{3} \frac{1}{p^2+1} - \frac{2}{3} \frac{1}{p^2+4},$$

ku ktorej nájdeme Laplaceov originál funkcie $y(\tau)$ pomocou tabuľky vzorov a obrazov $\mathcal{L}$ transformácie

$$y(\tau) = \mathcal{L}_{-1}\{Y(p)\} = \cos \tau + \frac{5}{3} \sin \tau - \frac{1}{3} \sin 2\tau$$

a následne po dosadení $\tau = t - \pi$ dostaneme celkové riešenie

$$y(t) = \cos(t - \pi) + \frac{5}{3} \sin(t - \pi) - \frac{1}{3} \sin 2(t - \pi) = -\cos t - \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin t.$$

■

■ **Príklad 10.32** Nájdime všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 4.$$

Predpokladajme, že

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1, \\ y'(0) &= c_2, \end{aligned}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$. Keďže

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} &= pY(p) - c_1, \\ \mathcal{L}\{y''(t)\} &= p^2 Y(p) - c_1 p - c_2, \\ \mathcal{L}\{4\} &= \mathcal{L}\{4H(t)\} = \frac{4}{p}, \end{aligned}$$

zobrazí sa daná diferenciálna rovnica do rovnice

$$\begin{aligned} p^2 Y(p) - c_1 p - c_2 - 2(pY(p) - c_1) + Y(p) &= \frac{4}{p}, \\ (p^2 - 2p + 1) Y(p) &= \frac{4}{p} + c_1 p + c_2 - 2c_1, \end{aligned}$$

odkiaľ dostávame pre prechodovú funkciu

$$Y(p) = \frac{c_1 p^2 + (c_2 - 2c_1)p + 4}{p(p-1)^2}.$$

Potom Laplaceov originál nájdeme použitím druhej Heavisideovej vety o rozklade 10.3.5

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}_{-1}\{Y(p)\} = \operatorname{res}_{p=0} Y(p) e^{pt} + \operatorname{res}_{p=1} Y(p) e^{pt} \\
 &= e^{0t} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{c_1 p^2 + (c_2 - 2c_1)p + 4}{(p-1)^2} + \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left(\frac{c_1 p^2 + (c_2 - 2c_1)p + 4}{p} e^{pt} \right) \\
 &= 4 + \lim_{p \rightarrow 1} \frac{e^{pt} (p^2 c_1 + 4pt - 2p^2 t c_1 + p^2 t c_2 + p^3 t c_1 - 4)}{p^2} \\
 &= 4 + e^t (c_1 + 4t - 2t c_1 + t c_2 + t c_1 - 4) \\
 &= c_1 e^t (1-t) + c_2 t e^t + 4t e^t - 4e^t + 4.
 \end{aligned}$$

■

Pozrime sa teraz na špeciálny prípad nulových počiatočných podmienok. Nech je daná lineárna diferenciálna rovnica

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t),$$

kde $a_k \in \mathbb{R}$, kde $k = 1, 2, \dots, n$, $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$. Riešenie $y(t)$ nech vyhovuje *nulovým počiatočným podmienkam*

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 0, \\
 y'(0) &= 0, \\
 &\dots \\
 y^{(n-1)}(0) &= 0,
 \end{aligned}$$

pre $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. V takomto prípade môžeme využiť Duhamelov integrál z Vety 10.2.14. Najskôr vyriešime pomocnú diferenciálnu rovnicu

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 1,$$

s nulovými začiatočnými podmienkami $x^{(k)}(0) = 0$, pre $k = 1, 2, \dots, n-1$. Predpokladáme, že $x^{(n)}(t) \in D_{\mathcal{L}}$, $y^{(n)}(t) \in D_{\mathcal{L}}$, a označme $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(p)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$ a $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$. Potom vzhľadom na nulové počiatočné podmienky pre $k = 1, 2, \dots, n$ platí

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{x^{(k)}(t)\} &= p^k X(p), \\
 \mathcal{L}\{y^{(k)}(t)\} &= p^k Y(p).
 \end{aligned}$$

Okrem toho platí $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$, preto transformovaný tvar pôvodnej a pomocnej diferenciálnej rovnice je

$$\begin{aligned}
 (p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) Y(p) &= F(p), \\
 (p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X(p) &= \frac{1}{p}.
 \end{aligned}$$

Pri označení $\Phi(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ dostávame

$$\begin{aligned}
 \Phi(p) Y(p) &= F(p), \\
 p \Phi(p) X(p) &= 1,
 \end{aligned}$$

a takisto

$$p \Phi(p) X(p) F(p) = F(p),$$

a konečne odtiaľ máme

$$Y(p) = pX(p)F(p).$$

Na základe toho, ak je funkcia $x(t) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ riešením pomocnej diferenciálnej rovnice s nulovými počiatocnými podmienkami, potom podľa Vety 10.2.14 pre riešenie pôvodnej diferenciálnej rovnice s nulovými počiatocnými podmienkami platí

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)x'(t-\tau)d\tau,$$

resp. ak $f'(t) \in D_{\mathcal{L}}$

$$y(t) = \int_0^t f'(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

■ **Príklad 10.33** Nájdime riešenie danej diferenciálnej rovnice vyhovujúce nulovým počiatocným podmienkam

$$\begin{aligned} y'''(t) + y'(t) &= e^{-t}, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0, \\ y''(0) &= 0. \end{aligned}$$

Pomocná diferenciálna rovnica má tvar

$$x'''(t) + x'(t) = 1$$

a má tiež nulové počiatocné podmienky $x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0$. Zavedieme označenie $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(p)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$ a podľa Dôsledku 10.2.3 Vety 10.2.2 o derivovaní spojitého originálu môžeme pomocnú diferenciálnu rovnicu transformovať Laplaceovou transformáciou na tvar

$$(p^3 + p)X(p) = \frac{1}{p},$$

odkiaľ pre obraz jej riešenia a následným rozkladom na elementárne zlomky dostávame

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Preto je riešením pomocnej diferenciálnej rovnice

$$x(t) = \mathcal{L}_{-1}\{X(p)\} = t - \sin t.$$

Prejdeme ku hľadaniu riešenia $y(t)$ pôvodnej diferenciálnej rovnice, funkcia pravej strany spĺňa $f'(t) = -e^{-t} \in D_{\mathcal{L}}$, a preto podľa Vety 10.2.14 platí

$$\begin{aligned} y(t) &= - \int_0^t e^{-(t-\tau)}(\tau - \sin \tau) d\tau = -e^{-t} \left(\int_0^t \tau e^{\tau} d\tau - \int_0^t e^{\tau} \sin \tau d\tau \right) \\ &= -e^{-t} \left([e^{\tau}(\tau-1)]_0^t - \left[\frac{1}{2} e^{\tau} (\sin \tau - \cos \tau) \right]_0^t \right) \\ &= -e^{-t} \left(te^t - e^t + 1 - \left(\frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= -t + 1 - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} (\sin t - \cos t). \end{aligned}$$

■

Riešenie systémov lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi je analogické riešeniu jednej rovnice, iba bude viesť v konečnom dôsledku k riešeniu systému lineárnych algebrických rovníc.

■ **Príklad 10.34** Nájdime partikulárne riešenie systému diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned}x''(t) + y''(t) + x'(t) - y(t) &= e^t, \\x'(t) - y'(t) + 2x(t) + y(t) &= e^{-t},\end{aligned}$$

vyhovujúce počiatočným podmienkam

$$\begin{aligned}x(0) &= x'(0) = 1, \\y(0) &= y'(0) = 0.\end{aligned}$$

Predpokladáme $x''(t) \in D_{\mathcal{L}}, y''(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a takisto použijeme označenie

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\} &= X(p), \\ \mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(p),\end{aligned}$$

čím vzhľadom na podmienky máme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x'(t)\} &= pX(p), \\ \mathcal{L}\{x''(t)\} &= p^2X(p) - 1, \\ \mathcal{L}\{y'(t)\} &= pY(p), \\ \mathcal{L}\{y''(t)\} &= p^2Y(p).\end{aligned}$$

Pre obrazy pravých strán platí

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^t\} &= \frac{1}{p-1}, \\ \mathcal{L}\{e^{-t}\} &= \frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

Systém má teda po transformácii tvar

$$\begin{aligned}p^2X(p) - 1 + p^2Y(p) + pX(p) - Y(p) &= \frac{1}{p-1}, \\ pX(p) - pY(p) + 2X(p) + Y(p) &= \frac{1}{p+1},\end{aligned}$$

ktorý upravíme

$$\begin{aligned}(p^2 + p)X(p) + (p^2 - 1)Y(p) &= \frac{1}{p-1} + 1, \\ (p+2)X(p) + (-p+1)Y(p) &= \frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

Sústavu vyriešime Cramerovým pravidlom

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix} p^2+p & p^2-1 \\ p+2 & -p+1 \end{vmatrix} = -2p^3 - 2p^2 + 2p + 2, \\ D_1 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{p-1} + 1 & p^2-1 \\ \frac{1}{p+1} & -p+1 \end{vmatrix} = 1 - 2p,\end{aligned}$$

$$D_2 = \left| \begin{array}{cc} p^2 + p & \frac{1}{p-1} + 1 \\ p + 2 & \frac{1}{p+1} \end{array} \right| = -3 \frac{p}{p-1},$$

čím rozkladom na elementárne zlomky dostávame

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{D_1}{D} = \frac{1-2p}{-2p^3-2p^2+2p+2} = \frac{1}{8(p-1)} - \frac{1}{8(p+1)} + \frac{3}{4(p+1)^2}, \\ Y(p) &= \frac{D_2}{D} = \frac{-3\frac{p}{p-1}}{-2p^3-2p^2+2p+2} = \frac{3}{8(p-1)^2} - \frac{3}{8(p+1)^2}. \end{aligned}$$

Z toho spätnou Laplaceovou transformáciou budú mať hľadané funkcie tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}_{-1}\{X(p)\} = \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{3}{4}te^{-t} = \frac{1}{4}\sinh t + \frac{3}{4}te^{-t}, \\ y(t) &= \mathcal{L}_{-1}\{Y(p)\} = \frac{3}{8}te^t + \frac{3}{8}te^{-t} = \frac{3}{4}t\sinh t. \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 10.35** Nájdime všeobecné riešenie systému diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + 2y(t), \\ y'(t) &= 2x(t) + y(t) + 1. \end{aligned}$$

Podobne ako predtým predpokladáme počiatočné podmienky $x(0) = c_1$ a $y(0) = c_2$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sú dané konštanty. A tiež predpokladáme $x'(t) \in D_{\mathcal{L}}, y'(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a takisto použijeme označenie $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(p)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$, potom, keďže $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$, bude mať systém po transformácii vzhľadom na predpokladané podmienky tvar

$$\begin{aligned} pX(p) - c_1 &= X(p) + 2Y(p), \\ pY(p) - c_2 &= 2X(p) + Y(p) + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Teda

$$\begin{aligned} (p-1)X(p) - 2Y(p) &= c_1, \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) &= c_2 + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Opäť Cramerovým pravidlom

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3 = (p-3)(p+1), \\ D_1 &= \begin{vmatrix} c_1 & -2 \\ c_2 + \frac{1}{p} & p-1 \end{vmatrix} = \frac{2pc_2 - pc_1 + p^2c_1 + 2}{p}, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} p-1 & c_1 \\ -2 & c_2 + \frac{1}{p} \end{vmatrix} = \frac{p + 2pc_1 - pc_2 + p^2c_2 - 1}{p}, \end{aligned}$$

a takisto rozkladom na elementárne zlomky dostávame

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{D_1}{D} = \frac{2pc_2 - pc_1 + p^2c_1 + 2}{p(p-3)(p+1)} \\ &= \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{p-3} \left(\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{6} \right) - \frac{2}{3p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y(p) &= \frac{D_2}{D} = \frac{p + 2pc_1 - pc_2 + p^2c_2 - 1}{p(p-3)(p+1)} \\
 &= \frac{1}{p-3} \left(\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3p}.
 \end{aligned}$$

A spätnou Laplaceovou transformáciou nájdeme všeobecné riešenie tvaru

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \mathcal{L}_{-1}\{X(p)\} = (c_1 - c_2 + 1) \frac{e^{-t}}{2} + \left(c_1 + c_2 + \frac{1}{3} \right) \frac{e^{3t}}{2} - \frac{2}{3}, \\
 y(t) &= \mathcal{L}_{-1}\{Y(p)\} = \left(c_1 + c_2 + \frac{1}{3} \right) \frac{e^{3t}}{2} - (c_1 - c_2 + 1) \frac{e^{-t}}{2} + \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

■

10.4.2 Výpočet nevlastných integrálov

Vlastnosti Laplaceovej transformácie nachádzajú uplatnenie aj pri riešení niektorých špeciálnych typov konvergentných nevlastných integrálov. Zrejme sa to bude týkať nevlastných integrálov cez interval $[0, \infty)$.

Typ 1. $\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$

Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$, potom podľa Definície 10.1.2 a Vety 10.1.1 pre každé $p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > s_0$, kde s_0 je exponent (index) rastu funkcie $f(t)$, platí

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

■ **Príklad 10.36** Vypočítajme nevlastný integrál

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \sin bt dt,$$

kde $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $b \in \mathbb{R}$.

Vieme, že $\mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{p^2 + b^2}$, kde pre $b \in \mathbb{R}$ a v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$ je funkcia $F(p) = \frac{b}{p^2 + b^2}$ holomorfná, a preto pre $p = a \in \mathbb{R}_{>0}$ platí

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \sin bt dt = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

■

Typ 2. $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$

Nech $\frac{f(t)}{t} \in D_{\mathcal{L}}$ je spojitá na intervale $[0, \infty)$ a integrál $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ konverguje. Potom $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ je tiež spojitá a jej Laplaceov obraz $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ je v oblasti $\operatorname{Re} p > 0$ holomorfná funkcia a platí

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(x) dx.$$

■ **Príklad 10.37** Vypočítajme nevlastný integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt,$$

kde $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

Ako už vieme $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{p^2 + a^2} = F(p)$, a preto zrejme platí

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt &= \int_0^{\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx = \left/ \begin{array}{c} w = \frac{x}{a} \\ dw = \frac{1}{a} dx \\ x \parallel 0 \quad \infty \\ w \parallel 0 \quad \infty \end{array} \right/ \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{(w)^2 + 1} dw = \lim_{q \rightarrow \infty} [\arctan w]_0^q = \lim_{q \rightarrow \infty} \arctan q - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 10.38** Vypočítajme nevlastný integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $0 < a < b$.

Vieme, že platí

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-at} - e^{-bt}\} = \frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b} = F(p),$$

preto

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right) dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{x+a}{x+b} \right]_0^q = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q+a}{q+b} - \ln \frac{a}{b} = \ln \frac{b}{a}.$$

■

Typ 3. $\int_0^{\infty} f(t) dt$

Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a $tf(t) \in D_{\mathcal{L}}$, a nech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$.

Podľa Vety 10.2.5 $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(p)}{dp}$, odkiaľ platí, že integrál $\int_0^{\infty} f(t) dt$ konverguje, a preto

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t) dt &= \int_0^{\infty} (t \cdot f(t)) \frac{1}{t} dt = \int_0^{\infty} (t \cdot f(t)) \underbrace{\left(\int_0^{\infty} e^{-pt} dp \right)}_{=\frac{1}{t}} dt = \int_0^{\infty} (t \cdot f(t) e^{-pt} dt) dp \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{dF(p)}{dp} dp = - \lim_{q \rightarrow \infty} [F(p)]_0^q = - \underbrace{\lim_{q \rightarrow \infty} F(q)}_{=0} + F(0) = F(0), \end{aligned}$$

keďže podľa Dôsledku 10.1.2 je $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$. Preto celkove pri splnení podmienok platí

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = F(0).$$

■ **Príklad 10.39** Vypočítajme nevlastný integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Ako vieme z Príkladu 10.13 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \operatorname{arccot} p = F(p)$, a preto zrejme platí

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = F(0) = \operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Nie je ťažké dokázať úplnú zhodu s Príkladom 10.37. ■

Typ 4. $\int_0^{\infty} t^n f(t) dt$

Nech $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$. Ak navyše integrál $\int_0^{\infty} t^n f(t) dt$ pre $n \in \mathbb{N}$ je konvergentný, potom aj $t^n f(t) \in D_{\mathcal{L}}$ a podľa Vety 10.2.5 platí

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}.$$

Preto pre

$$\int_0^{\infty} t^n f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{n+1} f(t)}{t} dt,$$

na základe vlastnosti pre nevlastný integrál Typu 2. vyplýva

$$\int_0^{\infty} t^n f(t) dt = \int_0^{\infty} (-1)^{n+1} F^{(n+1)}(x) dx = (-1)^{n+1} \int_0^{\infty} F^{(n+1)}(x) dx = (-1)^{n+1} \lim_{q \rightarrow \infty} \left[F^{(n)}(x) \right]_0^q.$$

■ **Príklad 10.40** Vypočítajme nevlastný integrál

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-at} dt,$$

kde $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $n \in \mathbb{N}$ sú dané čísla.

Vieme, že $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{p+a} = F(p)$, postupným derivovaním podľa premennej p dostávame

$$F^{(n)}(p) = \frac{(-1)^n n!}{(p+a)^{n+1}},$$

a preto

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^n e^{-at} dt &= (-1)^{n+1} \lim_{q \rightarrow \infty} \left[F^{(n)}(x) \right]_0^q = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^n n! \lim_{q \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(x+a)^{n+1}} \right]_0^q \\ &= -n! \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x+a)^{n+1}} - \frac{1}{(0+a)^{n+1}} \right) = \frac{n!}{a^{n+1}}. \end{aligned}$$

■

10.5 Cvičenia

Cvičenie 10.1 Použitím Laplaceovho integrálu a základných vlastností Laplaceovej transformácie nájdite Laplaceov obraz funkcií $f(t) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, resp. $f(t) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$:

- | | |
|--|--|
| a) $f(t) = 1 + t$, | $\left[\frac{z^d}{1+d} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| b) $f(t) = 2 \sin t - \cos t$, | $\left[\frac{1+z^d}{d-z} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| c) $f(t) = \sin^3 t = \frac{1}{4} (3 \sin t - \sin 3t)$, | $\left[\frac{(6+z^d)(1+z^d)}{9} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| d) $f(t) = a^t$, kde $a \in \mathbb{R}_{>0}$, | $\left[\frac{v u^{1-d}}{1} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| e) $f(t) = t a^t$, kde $a \in \mathbb{R}_{>0}$, | $\left[\frac{z^{(v u^{1-d})}}{1} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| f) $f(t) = e^{at} a^t$, kde $a \in \mathbb{R}_{>0}$, | $\left[\frac{v u^{1-v-d}}{1} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| g) $f(t) = (t + \frac{b}{2} t^2) e^{bt}$, kde $b \in \mathbb{C}$, | $\left[\frac{z^{(q-d)}}{d} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| h) $f(t) = (1 + 2bt + \frac{b^2}{2} t^2) e^{bt}$, kde $b \in \mathbb{C}$, | $\left[\frac{z^{(q-d)}}{z^d} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| i) $f(t) = \frac{1 - \cos at}{t}$, kde $a \in \mathbb{R}$, | $\left[\frac{z^d}{z^{p+d}} u^{1-\frac{z}{1}} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| j) $f(t) = \frac{\cos bt - \cos at}{t}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, | $\left[\frac{z^{q+d}}{z^{p+d}} u^{1-\frac{z}{1}} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| k) $f(t) = \int_0^t \frac{\sin \omega u}{u} du$, kde $\omega \in \mathbb{R}$, | $\left[\frac{\omega}{d} \log \frac{d}{1} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| l) $f(t) = \int_0^t \frac{\sinh \omega u}{u} du$, kde $\omega \in \mathbb{R}$. | $\left[\frac{\omega - d}{\omega + d} u^{1-\frac{dz}{1}} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |

Cvičenie 10.2 Použitím vlastností Laplaceovej transformácie nájdite Laplaceov obraz pre originál štandardného typu $f(t) \in D_{\mathcal{L}}$:

- | | |
|---|--|
| a) $f(t) = \sin at \cos bt$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, | $\left[\frac{(z(q+v)+z^d)(z(q-v)+z^d)}{(z^q - z^{p+d})^v} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| b) $f(t) = \sinh at \cosh bt$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, | $\left[\frac{(z(q+v)-z^d)(z(q-v)-z^d)}{(z^q + z^{p+d})^v} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| c) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pre } t < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{pre } t = a, \\ 1 - e^{-b(t-a)}, & \text{pre } t > a, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R}, \end{cases}$ | $\left[\frac{(q+d)d}{d^{p-1} q} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| d) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{pre } t \in [0, \pi], \\ 0, & \text{všade inde,} \end{cases}$ | $\left[\frac{1+z^d}{d^{p-1} q+1} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| e) $f(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{pre } t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & \text{všade inde,} \end{cases}$ | $\left[\frac{1+z^d}{d^{\frac{p}{2}-1} q+d} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| f) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pre } t \in (-\infty, 1], \\ \cos^2(t-1), & \text{pre } t \in (1, \infty), \end{cases}$ | $\left[\frac{(p+z^d)z}{d^{p-1} q} + \frac{dz}{d^{p-1} q} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
| g) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pre } t \in (-\infty, \frac{\pi}{8}], \\ \sin(2t - \frac{\pi}{4}), & \text{pre } t \in (\frac{\pi}{8}, \infty). \end{cases}$ | $\left[\frac{p+z^d}{d^{\frac{p}{2}-1} q} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |

Cvičenie 10.3 Použitím Vety 10.2.11 nájdite Laplaceov obraz periodickej funkcie $f(t) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$:

- | | |
|---|---|
| a) $f(t) = \sin bt $, kde $b \in \mathbb{R}_{>0}$, | $\left[0 < d \in \mathbb{R} \wedge \frac{dz}{dx} \coth \frac{z^q+z^d}{q} = \frac{\frac{q}{dz}-1}{\frac{q}{dz}+1} \frac{z^q+z^d}{q} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]$ |
|---|---|

$$\begin{aligned}
 \text{b) } f(t) &= \begin{cases} t^2, & \text{pre } t \in [0, 1), \\ f(t+1), & \text{pre } t \in [0, \infty), \end{cases} & \left[0 < d \operatorname{Re} p < \frac{(d-1)d}{(d+1)(d+2)}, \frac{d}{d+1} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right] \\
 \text{c) } f(t) &= \begin{cases} \cos t, & \text{pre } t \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ f(t + \frac{\pi}{2}), & \text{pre } t \in [0, \infty), \end{cases} & \left[0 < d \operatorname{Re} p < \frac{(1-e^{-\frac{\pi}{2}})}{d}, \frac{1}{d} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right] \\
 \text{d) } f(t) &= f(t+a) = \begin{cases} \frac{2t}{a}, & \text{pre } t \in [0, \frac{a}{2}), \\ f(t + \frac{\pi}{2}), & \text{pre } t \in [\frac{a}{2}, a), \text{ kde } a \in \mathbb{R}_{>0}. \end{cases} & \left[0 < d \operatorname{Re} p < \frac{1}{d}, \frac{1}{d} \tanh \frac{d}{2} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]
 \end{aligned}$$

Cvičenie 10.4 Použitím Vety 10.2.12 o „tlmení“ originálu nájdite Laplaceov obraz funkcie $f(t) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(t) &= \frac{t^n}{n!} \sin bt, \text{ kde } a \in \mathbb{R}, & \left[0 < d \operatorname{Re} p < \frac{1+u}{1+u}, \frac{(1+u)(1+u+d)}{(1+u)(1+u+d)} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right] \\
 \text{b) } f(t) &= \frac{1}{2} \sinh at \sin at, \text{ kde } a \in \mathbb{R}, & \left[0 < d \operatorname{Re} p < \frac{1+u}{1+u}, \frac{(1+u)(1+u+d)}{(1+u)(1+u+d)} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right] \\
 \text{c) } f(t) &= e^{3t} \cos 3t \sin 4t, & \left[3 < d \operatorname{Re} p < \frac{1+u}{1+u}, \frac{(1+u)(1+u+d)}{(1+u)(1+u+d)} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right] \\
 \text{d) } f(t) &= \sinh 4t \cos^2 3t. & \left[4 < d \operatorname{Re} p < \frac{1+u}{1+u}, \frac{(1+u)(1+u+d)}{(1+u)(1+u+d)} = \{(t)f\} \mathcal{L} \right]
 \end{aligned}$$

Cvičenie 10.5 Použitím vlastností konvolúcie zjednodušte výrazy obsahujúce funkcie z $D_{\mathcal{L}}$:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & (1 + \sqrt{t}) * \sin t + (1 - \sqrt{t}) * \cos t + (1 + \sqrt{t}) * \cos t + (1 - \sqrt{t}) * \sin t, & [(1 + t \cos - t \sin) \mathcal{L}] \\
 \text{b) } & t * \sin^2 t + \cos^2 t * t. & \left[\frac{t}{t^2} \right]
 \end{aligned}$$

Cvičenie 10.6 Nájdite konvolučný súčin $k(t) = (f * g)(t)$ funkcií patriacich do $D_{\mathcal{L}}$:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(t) &= t^2, g(t) = t^3, & \left[\frac{09}{9} = (t) \mathcal{L} \right] \\
 \text{b) } f(t) &= e^{at}, g(t) = 1 - at, \text{ kde } a \in \mathbb{R}, & [1 = (t) \mathcal{L}] \\
 \text{c) } f(t) &= \sin t, g(t) = \sinh t, & [(1 \sin - 1 \sinh) \mathcal{L}] \\
 \text{d) } f(t) &= \cosh t, g(t) = \sin t, & [(1 \cosh - 1 \sin) \mathcal{L}] \\
 \text{e) } f(t) &= e^t, g(t) = e^{-t}, & [1 \sinh = (t) \mathcal{L}] \\
 \text{f) } f(t) &= e^{at}, g(t) = e^{bt}, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R}, a < b. & \left[\frac{p-q}{p-q} = (t) \mathcal{L} \right]
 \end{aligned}$$

Cvičenie 10.7 Použitím Borelovej vety alebo Duhamelovho vzorca nájdite originál $f(t)$ Laplaceových obrazov $F(p)$ v oblastiach, v ktorých sú definované:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } F(p) &= \frac{1}{(p-1)^2(p-2)^2}, & [e^{\mathcal{L}} - e^{\mathcal{L}} + e^{\mathcal{L}} + e^{\mathcal{L}} = (t) f] \\
 \text{b) } F(p) &= \frac{1}{(p-1)(p^2+4)}, & [(e^{\mathcal{L}} + e^{\mathcal{L}} \cos - e^{\mathcal{L}} \sin) \mathcal{L}] \\
 \text{c) } F(p) &= \frac{1}{(p^2-6p+13)(p^2-6p+10)}, & [(e^{\mathcal{L}} \sin - e^{\mathcal{L}} \cos) \mathcal{L}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } F(p) &= \frac{p}{(p-2)^3}, & [(1 + \tau t) \tau \ominus &= (t) f] \\
 \text{e) } F(p) &= \frac{p^2}{(p^2+1)^3}, & [(t \odot t - t \text{u} \text{s} + t \text{u} \text{s} \tau t) \frac{8}{1} &= (t) f] \\
 \text{f) } F(p) &= \frac{p^3}{(p^2+9)(p^2+8)}. & [t \wedge \tau \odot \odot 8 - t \xi \odot \odot 6 &= (t) f]
 \end{aligned}$$

Cvičenie 10.8 Použitím vlastností Laplaceovej transformácie a tabuľky vzorov a obrazov $\mathcal{L}$ transformácie nájdite Laplaceov originál $f(t)$ k danému obrazu:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } F(p) &= \frac{4p^3+9p^2+8p+2}{p(p+2)(p^2+1)}, & [t \odot \odot \tau + t \text{u} \text{s} \xi + t \tau \ominus + 1 &= (t) f] \\
 \text{b) } F(p) &= \frac{-p^2-3p-3}{p(p+1)^2}, & [t \tau \ominus \tau + t \tau \ominus t + \xi - &= (t) f] \\
 \text{c) } F(p) &= \frac{-11p^3+3p^2+18p+10}{5p^4+5p^3-10p}, & [t \odot \odot t \tau \ominus \tau - t \ominus \frac{\xi}{4} + 1 - &= (t) f] \\
 \text{d) } F(p) &= \frac{p^4-4p^2-8p+15}{(p^2+9)(p+1)^3}, & [t \xi \text{u} \text{s} - t \xi \odot \odot + t \tau \ominus \tau &= (t) f] \\
 \text{e) } F(p) &= \frac{1}{(p+1)^2} e^{-p}, & [(1-t) H_{t-1} \ominus (1-t) &= (t) f] \\
 \text{f) } F(p) &= \frac{p+2}{p(p^2+2p+2)} e^{-4p}, & [(4-t) H(1-(4-t) \odot \odot t \tau \ominus) - &= (t) f] \\
 \text{g) } F(p) &= \frac{e^{-2p}-e^{-p}}{p^2+1}, & [(t-1) H((t-1) \text{u} \text{s}) - (1-t) H((1-t) \text{u} \text{s}) &= (t) f] \\
 \text{h) } F(p) &= \frac{1-e^{-2p}}{p^2+p}, & [(1-t \ominus + (t-1) H(t \ominus - \tau \ominus)) t \tau \ominus &= (t) f] \\
 \text{i) } F(p) &= \frac{1}{p} e^{-p} + \frac{p}{p^2+1} e^{-2p}, & [(t-1) H((1-t) \odot \odot) + (1-t) H &= (t) f] \\
 \text{j) } F(p) &= \frac{1-e^{-5p}+pe^{-5p}}{p^2}, & [(t-1) H(9-t) - t &= (t) f] \\
 \text{k) } F(p) &= \frac{4-e^{-\frac{\pi p}{2}}}{p^2+4}. & [(4 + (\frac{t}{2} - 1) H) t \odot \odot t \text{u} \text{s} &= (t) f]
 \end{aligned}$$

Cvičenie 10.9 Použitím viet o rozklade (1. Heavisideovej vety 10.3.3 alebo Vety 10.3.4 či jej dôsledku 2. Heavisideovej vety 10.3.5) nájdite Laplaceov originál $f(t)$ k danému obrazu:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } F(p) &= \frac{1}{(p+1)^3(p+3)}, & [(t \tau \ominus - t \tau \ominus (1 + t \tau - \tau t \tau)) \frac{8}{1} &= (t) f] \\
 \text{b) } F(p) &= \frac{1}{p^3(p+1)^4}, & [(09 + t \tau \tau - \tau t \xi + t \tau \ominus (09 - t \tau \xi - \tau t \tau - \xi t \tau)) \frac{9}{1} &= (t) f] \\
 \text{c) } F(p) &= \frac{1}{(p-1)^2(p+2)^3}, & [t \tau \ominus \ominus (\frac{\xi}{t} + t \frac{\xi}{4} + \tau t) \frac{81}{1} + t \ominus (1-t) \frac{L \tau}{1} &= (t) f] \\
 \text{d) } F(p) &= \frac{1}{(p+3)(p-2)^2}, & [(t \tau \ominus - t \tau \ominus (1 - t \tau)) \frac{5 \tau}{1} &= (t) f] \\
 \text{e) } F(p) &= \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}, & [(t \tau \text{u} \text{s} \frac{\tau}{\xi} - t \tau \odot \odot) t \tau \ominus - t \tau \ominus &= (t) f] \\
 \text{f) } F(p) &= \frac{a^4}{p(p^2+a^2)^2}, \text{ kde } a \in \mathbb{C}, & [(t + m \odot \odot \tau - m \text{u} \text{s} m -) \frac{\tau}{1} &= (t) f] \\
 \text{g) } F(p) &= \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right), & \left[\frac{t}{t \tau \ominus - 1} &= (t) f \right] \\
 \text{h) } F(p) &= \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}, & \left[\frac{\tau(i(u \tau))}{u \tau^t} u(1 -) \sum_{\infty}^{0=u} &= (t) f \right] \\
 \text{i) } F(p) &= \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}, & \left[\frac{\tau(i(u))}{u^t} u(1 -) \sum_{\infty}^{0=u} &= (t) f \right] \\
 \text{k) } F(p) &= \frac{1}{\sqrt{p}} \cos \frac{1}{p}, & \left[\frac{m \wedge}{t \tau \wedge \odot \odot t \tau \wedge \text{u} \text{s} \odot} &= (t) f \right] \\
 \text{l) } F(p) &= \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \frac{1}{p}, & \left[\frac{m \wedge}{t \tau \wedge \text{u} \text{s} t \tau \wedge \text{u} \text{s}} &= (t) f \right]
 \end{aligned}$$

- m) $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{1}{p}}$, $\left[\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{1}{p}} = (1)f \right]$
 n) $F(p) = \sinh 2\sqrt{p}$, $\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{1} \frac{1}{1} = (1)f \right]$
 o) $F(p) = \frac{1}{p\sqrt{p}} e^{\frac{1}{p}}$, $\left[\frac{1}{1} \frac{1}{\sqrt{p}} = (1)f \right]$

Cvičenie 10.10 Použitím Laplaceovej transformácie nájdite riešenie danej diferenciálnej rovnice vyhovujúce daným počiatočným podmienkam:

- a) $y''(t) + 4y(t) = \sin t$, za podmienok $y(0) = 1, y'(0) = -2$, $\left[(1 \cos 1 - 1) 1 \sin \frac{1}{1} + 1 \cos 1 = (1)f \right]$
 b) $y''(t) - 2y'(t) = e^t (t^2 + t + 3)$, za podmienok $y(0) = 2, y'(0) = 2$, $\left[(1 + 1 \frac{1}{1} (1 + 1 + 1) - 1 \frac{1}{1} = (1)f \right]$
 c) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t} (t + \cos t)$, za podmienok $y(0) = 1, y'(0) = -1$, $\left[(1 \cos 1 + 1 \sin 1 - 1) 1 \cos \frac{1}{1} = (1)f \right]$
 d) $y'''(t) + 2y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 1$, za podmienok $y(0) = 3, y'(0) = -1, y''(0) = 4$, $\left[(1 \cos 1 + 1 \sin 1 - 1) 1 \cos \frac{1}{1} = (1)f \right]$
 e) $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = \cos t$, za podmienok $y(0) = 0, y'(0) = 0$, $\left[(1 \cos 1 - 1 \sin 1 + 1 \cos 1) 1 \cos \frac{1}{1} = (1)f \right]$
 f) $y'''(t) + y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t$, za podmienok $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0$, $\left[((1 \cos 1 - 1 \sin 1) 1 \cos \frac{1}{1} + 1 \sin 1 - 1 \cos 1) \frac{1}{1} = (1)f \right]$
 g) $y^{(4)}(t) + 2y''(t) + y(t) = 0$, za podmienok $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 1$, $\left[(1 \cos 1 - 1 \sin 1) \frac{1}{1} = (1)f \right]$
 h) $y''(t) + y(t) = e^{-t}$, za podmienok $y(3) = 0, y'(3) = 4$, $\left[(1 \cos 1 - 1 \sin 1) \frac{1}{1} = (1)f \right]$
 i) $y''(t) + 4y(t) = 4(\sin 2t + \cos 2t)$, za podmienok $y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$, $\left[(1 \cos 1 + 1 \sin 1) \frac{1}{1} = (1)f \right]$
 j) $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 4e^t \cos t$, za podmienok $y(\pi) = e^\pi, y'(\pi) = e^\pi$, $\left[(1 \cos 1 + 1 \sin 1) \frac{1}{1} = (1)f \right]$
 k) $y'''(t) - y'(t) = e^{4t} \sin^2 t$, za podmienok $y(1) = y'(1) = y''(1) = 1$, $\left[(1 \cos 1 + 1 \sin 1) \frac{1}{1} = (1)f \right]$

Cvičenie 10.11 Použitím Laplaceovej transformácie nájdite všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice:

- a) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t}$, $\left[1 \cos \frac{1}{1} + 1 \sin \frac{1}{1} = (1)f \right]$
 b) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t$, $\left[\frac{1}{1} + 1 \cos 1 + 1 \sin 1 = (1)f \right]$
 c) $y'''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = (4t^2 + 4t - 10)e^{-t}$, $\left[1 \cos 1 + 1 \sin 1 + 1 \cos 1 = (1)f \right]$
 d) $y''(t) + y(t) = 2 \sin t \sin 2t$, $\left[1 \cos 1 + 1 \sin 1 + 1 \cos 1 = (1)f \right]$
 e) $y'''(t) - 4y'(t) = te^{2t} + \sin t + t^2$, $\left[1 \cos 1 + 1 \sin 1 + 1 \cos 1 = (1)f \right]$

$$f) \quad y^{(4)}(t) + y'''(t) = \cos t.$$

$$\left[\frac{s}{s^4} + \frac{1}{s^4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} \frac{1}{s^2} + \frac{8}{s^4} - \frac{1}{s^4} - \frac{1}{s^4} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} \frac{1}{s^2} + 1 = (1) \right]$$

$$\left[\frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^4} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} \frac{1}{s^2} \right]$$

Cvičenie 10.12 Použitím Laplaceovej transformácie nájdite partikulárne riešenie daného systému diferenciálnych rovníc vyhovujúce daným počiatočným podmienkam:

a) $x'(t) = 2y(t)$, za podmienok $x(0) = 2$,
 $y'(t) = 2x(t)$, $y(0) = 2$, $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} = (1) \end{array} \right]$

b) $x'(t) = 3x(t) + 4y(t)$, za podmienok $x(0) = 1$,
 $y'(t) = 4x(t) - 3y(t)$, $y(0) = 1$, $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} = (1) \end{array} \right]$

c) $x'(t) + 2x(t) - y(t) = \sin t$, za podmienok $x(0) = 0$,
 $y'(t) + 4x(t) - 2y(t) = \cos t$, $y(0) = 0$, $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} = (1) \end{array} \right]$

d) $x'(t) = x(t) + y(t) + t$, za podmienok $x(0) = 0$,
 $y'(t) = x(t) - y(t)$, $y(0) = 1$, $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} = (1) \end{array} \right]$

e) $x''(t) - 4x(t) - y'(t) - 2y(t) + z'(t) - 2z(t) = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$,
 $2x'(t) - y''(t) + 3y(t) + z''(t) - 4z(t) = 0$, za podmienok $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$,
 $x'(t) - 2x(t) - y(t) + z''(t) - 4z(t) = 0$, $z(0) = 1$, $z'(0) = 1$.

Cvičenie 10.13 Pomocou Laplaceovej transformácie nájdite všeobecné riešenie daného systému diferenciálnych rovníc:

a) $x'(t) = -x(t) + 8y(t)$,
 $y'(t) = x(t) + y(t)$, $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} = (1) \end{array} \right]$

b) $x'(t) = 2x(t) + y(t)$,
 $y'(t) = -x(t) + 4y(t)$, $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} = (1) \end{array} \right]$

c) $x'(t) = x(t) - 5y(t)$,
 $y'(t) = 2x(t) - y(t)$, $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} = (1) \end{array} \right]$

d) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) + y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$,
 $x''(t) + x'(t) + 2x(t) + y''(t) + 3y(t) = 0$, $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} = (1) \end{array} \right]$

e) $x'(t) + 2x(t) + 4y(t) = 1 + 4t$,
 $y'(t) + x(t) - y(t) = \frac{3}{2}t^2$, $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} = (1) \end{array} \right]$

f) $x'(t) = 2x(t) + y(t) - 2z(t) - t + 2$,
 $y'(t) = -x + 1$,
 $z'(t) = x(t) + y(t) - z(t) - t + 1$, $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} = (1) \end{array} \right]$

Cvičenie 10.14 Použitím Laplaceovho integrálu a vlastností Laplaceovej transformácie vypočítajte dané nevlastné integrály:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} e^{-at} \cos bt \, dt, \text{ kde } a \in \mathbb{R}_{>0}, b \in \mathbb{R} \text{ sú dané čísla,} \quad \left[\frac{a}{a^2 + b^2} \right]$$

$$\text{b) } \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} \sin t}{t} \, dt, \text{ kde } a \in \mathbb{R}_{>0} \text{ je dané číslo,} \quad \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{arctan} a \right]$$

$$\text{c) } \int_0^{\infty} e^{-4t} \sin 3t \cos 2t \, dt, \quad \left[\frac{69}{125} \right]$$

$$\text{d) } \int_0^{\infty} e^{-3t} \cos 3t \sin 4t \, dt, \quad \left[\frac{16}{125} \right]$$

$$\text{e) } \int_0^{\infty} t e^{-4t} \cos 2t \, dt, \quad \left[\frac{1}{16} \right]$$

$$\text{f) } \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-6t}}{t e^t} \, dt. \quad \left[\frac{1}{2} \ln 2 \right]$$

Použitá a odporúčaná literatúra

- [1] Černý, I.: *Základy analýzy v komplexním oboru*, Praha, AKADEMIA, 1967, 600 s.
- [2] Demetrian, M.: *Základy teórie funkcií komplexnej premennej*, Bratislava, Univerzita Komenského, 2011, 284 s.
- [3] Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J., Šulka, R.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky - 4. časť*, Bratislava, Alfa, 1970, 288 s.
- [4] Hamhalter, J., Tišer, J.: *Funkce komplexní proměnné*, Praha, České Vysoké Učení Technické, 2017, 194 s.
- [5] Kluvánek, I., Mišík, L., Švec, M.: *Matematika II.*, Bratislava, Alfa, 1971.
- [6] Moravčík, J.: *Matematická analýza 3*, Bratislava, Alfa, 1992, 384 s.
- [7] Moravčík, J.: *Matematika V - Integrálne transformácie*, Žilina, EDIS - vydavateľstvo ŽU, 2000, 109 s.
- [8] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Corporation, 3 edition, 1986, 416 s.

Mgr. Pavol Oršanský, PhD.

TEÓRIA KOMPLEXNEJ PREMENNEJ

Vydala Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina
v edičnom rade VYSOKOŠKOLSKÉ UČEBNICE

Vedecký redaktor prof. Ing. Peter Palček, PhD.

Zodp. red. PhDr. Katarína Šimánková

Tech. red. Mgr. Jana Pauríková

Autori grafiky Ing. Peter Tomašovič, Mgr. Dušan Paulo

Vytlačilo EDIS-vydavateľské centrum ŽU, Univerzitná HB, Žilina
v roku 2020 ako svoju 4685. publikáciu
243 strán, 43 obrázkov, AH 12,70, VH 13,25
1. vydanie, náklad 50 výtlačkov

ISBN 978-80-554-1764-6

www.edis.uniza.sk